МЕТОД

МАТЕМАТИЧКИ ЛАВИРИНТ

ЗГОЛЕМУВАЊЕ НА НИВОТО НА ЗНАЕЊЕ ПРЕКУ РЕШАВАЊЕ НА МАТЕМАТИЧКИ ПРОБЛЕМИ

WWW.MATH-LABYRINTH.EU

2015-1-MK01-KA201-002849

ПРИРАЧНИК

Funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

ПРИРАЧНИК
за методот
Математички лавиринт

МАТЕМАТИЧКИ ЛАВИРИНТ

Зголемување на нивото на знаење преку решавање на математички проблеми

2015-1-MK01-KA201-002849

www.math-labyrinth.eu

2017

NATIONAL AGENCY for European Educational Programmes and Mobility

Funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

ПУБЛИКАЦИЈА

Прирачник за методот Математички лавиринт

ИЗДАВАЧ

СОУ Гимназија „Кочо Рацин“ – Велес

АВТОРИ

Мариче Лазаровска, Христина Леова, Зоран Трифунов, Берна Мусардо, Мариела Д’ Адамо, Ана Мариа Меле, Томасо Фама, Карло Кало, Павлета Жељаскова, Нели Георгиева, Теодора Ставрева, Цветинка Орешарова, Галина Хрисандова, Грегори Макридес, Андреас Скотинос, Анаргирос Фелурис, Татјана Атанасова-Пачемска, Марија Митева, Лимонка Лазарова

УРЕДНИК

Мариче Лазаровска

ЛЕКТОР

Јовица Темов

ПРЕВОД

Соња Трајчева, Филимена Костова, Мимоза Костоска

ДИЗАЈН НА КОРИЦА

Дино Јанаќиев

ПЕЧАТЕЊЕ

Бранко Гапо ДООЕЛ - Скопје

ТИРАЖ 200

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51:377.02-043.5(036)

ПРИРАЧНИК за методот математички лавиринт : зголемување на нивото на знаење преку решавање на математички проблеми / Мариче Лазаровска ... [и др.]. - Велес : СОУ Гимназија "Кочо Рацин", 2017. - 91 стр. : илустр. ; 21 см

Автори: Мариче Лазаровска, Христина Леова, Зоран Трифунов, Берна Мусардо, Мариела Д' Адамо, Ана Мариа Меле, Томасо Фама, Карло Кало, Павлета Жељаскова, Нели Георгиева, Теодора Ставрева, Цветинка Орешарова, Галина Хрисандова, Грегори Макридес, Андреас Скотинос, Анаргирос Фелурис, Татјана Атанасова-Пачемска, Марија Митева, Лимонка Лазарова. - Библиографија: стр. 89-90

ISBN 978-608-66136-1-7
1. Лазаровска, Мариче [автор]
а) Математика - Методика - Интерактивен пристап - Прирачници
COBISS.MK-ID 105177866

ПРИДОНЕС ВО ИЗРАБОТКАТА НА ПРИРАЧНИКОТ

Прирачникот е производ на заедничка работа на сите партнери за имплементирање на Еразмус + проектот – Математички лавиринт, а тоа се:

Координатор организација:

1. СОУ „Гимназија Кочо Рацин“ – Велес, Македонија (Мариче Лазаровска, Христина Леова, Зоран Трифунов);

Партнер организации:

2. Средно техничко училиште „Оресте Дел Прете“ – Сава, Италија (Берна Мусардо, Мариела Д’ Адамо, Ана Мариа Меле, Томасо Фама, Карло Кало);
3. Средно училиште за општествени науки „Св.Кирил и Методиј“ – Добрич, Бугарија (Павлета Желъскова, Нели Георгиева, Теодора Ставрева, Цветинка Орешарова, Галина Хрисандова);
4. Кипарско математичко друштво Никозија – Кипар (Грегори Макридес, Андреас Скотинос);
5. Асоцијација на математички здруженија на Јужна и Југоисточна Европа MASSEE – Атина, Грција (Анаргирос Фелурис);
6. Државен универзитет „Гоце Делчев“ – Штип, Македонија (Татјана Атанасова-Пачемска, Марија Митева, Лимонка Лазарова).

©2017 Проект - Математички лавиринт

Демант: „Во поддршката на оваа публикација, Европската комисија не ги промовира содржините кои ги рефлектираат ставовите само на авторите и Комисијата не е одговорна за каква било примена на информации кои се содржани во неа.“

Целокупниот производ на проектот Математички лавиринт се состои од Интерактивна книга Математички лавиринт и Прирачник, Збирка на добри практики, Курс за обука на наставници и Евалуациски извештај. Нив може да ги преземете од следнава веб страна: www.math-labyrinth.eu

Содржина

Вовед во проектот Математички лавиринт 5
Структура на Еразмус + проектот Математички лавиринт 7
Методологија за решавање проблеми. 9
Техники за решавање проблеми 10
Придобивки на наставниците и учениците кои го применуваат методот Математички лавиринт 14
Што е Математички лавиринт 16
Математички лавиринт во „геопедагошка“ перспектива на Доживотното учење 17
Содржина на Интерактивната книга 20
Како се користи Математичкиот лавиринт 21
Како се работат вежбите - примери 32
Диференцијални равенки: „Реновирана куќа“ 32
Функции и нивна апликација: „Веранда“ 38
Квадратни функции: „Прозорец на таванот“ 43
Веројатност: „Средба на двајца пријатели“ 50
Моделирање со линеарни равенки: „Проблем со движење во воз“ 57
Моделирање на систем од втор степен со две непознати: „Лимен покрив“ 65
Евалуација 72
Математички кампови 75
Формулар за евалуација 76
Формулар за самооценување 77
Влезен тест 78
Евалуација на напредувањето на учениците 79
Финален тест 80
Евалуација на Интерактивната книга 81
Евалуација на математичките кампови 82
Анализа на резултатите 84
Заклучок 88
Корисни линкови 89
Референци 90

ВОВЕД ВО ПРОЕКТОТ МАТЕМАТИЧКИ ЛАВИРИНТ

Во согласност со приоритетите поставени од Европската комисија, а во врска со потребата на наставниците за нови пристапи во изучувањето на математиката, во 2015 година беше поднесена апликација за финансирање на проектот Математички лавиринт од страна на програмата Еразмус+ во Клучна акција 2 – Стратешко партнерство за иновации и размена на добри практики.

Учениците ја сметаат математиката за тешка дисциплина, па немаат доволно мотивација и интерес за стекнување вештини и компетенции по овој предмет. Бројот на ученици со ниски постигнувања по математика во средните училишта низ Европа е прилично голем. Од друга страна, потребен им е одреден квантум знаење за да ги положат испитите на крајот на нивното образование. Шест ораганизации во ова партнерство се фокусирани да ги мотивираат токму овие ученици при изучувањето математика. Еден од пристапите кои ги сугерираме е поврзување на математиката со проблеми со кои учениците се соочуваат секојдневно.

Математиката е неопходна за решавање на многу секојдневни ситуации и проблеми, па затоа целта на проектот Математички лавиринт е да го зголеми нивото на знаење по математика кај учениците со ниски постигнувања преку решавање на математички проблеми.

Една од главните цели на проектот Математички лавиринт е: **Интерактивна книга со математички проблеми од секојдневниот живот.** Проектот Математички лавиринт има за цел да развие нова методологија во учењето и подучувањето математика за ученици на возраст од 14 до 18 години, а која ќе може да се користи во секоја училишна средина.

Целта на овој проект е развивање на методологија за учење и подучување математика преку креирање на Интерактивна книга која ќе ја користат и учениците и наставниците. Оваа книга ќе ги стави учениците во центарот на вниманието и ќе ги предизвика да почнат да решаваат проблеми и да изнаоѓаат решенија за нив. Преку помагање на секој чекор, книгата има за цел да ја зголеми мотивацијата кај учениците за разбирање на проблемот.

На различни нивоа учениците можат да добијат различни видови помош преку слики, презентации, видеа и сл. кои ќе им овозможат да напредуваат во „Лавиринтот“ и да излезат од него со решен проблем.

Овој производ е пример за наставен материјал и методологија за подучување ученици на возраст меѓу 14 и 18 години по математика. Интерактивната книга се состои од математички проблеми со различен степен на сложеност. Математичките подрачја што ги покриваат содржините на оваа книга соодветствуваат на секојдневни ситуации и се во согласност со наставните програми. Целта е да се поттикне способноста на мозокот да визуелизира и да го употреби знаењето за решавање реални проблеми.

Се очекува од наставниците да бидат ментори на креативност на нивните ученици. Тие ќе им помогнат во изборот на математички проблеми од секојдневниот живот, а истите треба да бидат решавани од нивните соученици. Овој пристап на учење - врсник со врсник, влијае врз развивањето на мислењето, резонирањето и разбирањето на проблемите од страна на учениците, а во исто време ги учи учениците со ниски постигнувања како да ги разберат дропките, геометриските сложувалки и проблеми итн.

Името „Лавиринт“ се однесува на комплексноста во изнаоѓањето на решенија. Со цел да се реши еден ваков проблем неопходни се неколку операции и учениците мора да се присетат на содржини и знаења кои ги стекнале во нивното дотогашно образование.

Целта на оваа книга не е да им даде директни одговори на учениците, туку да ги поттикне да мислат и да учат во исто време. Суштината е учење на најчестите математички операции и врски, и нивна примена во секојдневниот живот. Наставниците даваат насоки и помош за време на решавањето на дадените проблеми и чекор по чекор пристап во решавањето со што го привлекуваат вниманието на учениците и ги поттикнуваат да ја засакаат математиката.

Проектот Математички лавиринт ги овозможува следниве придобивки:

- иновативен пристап во учењето математика и интегрирана методологија на добри практики;

- намалени разлики во придобивките од учењето кои се однесуваат на сите ученици, особено тие што постигнуваат послаби резултати;
- ИКТ-базирана методологија за учење математика и овозможување на поатрактивна едукација и обука;
- креирање на е-платформа за подучување и учење математика;
- подобрено оценување на клучните компетенции (математика и дигитални вештини);
- примена на иновативни практики во образованието и користење на отворени едукативни ресурси;
- поттикнување на професионалниот развој на наставниците кои се инволвирани во едукативниот процес;
- вклученост на учениците во процесот на учење.

СТРУКТУРА НА ЕВРОПСКИОТ ЕРАЗМУС+ ПРОЕКТ МАТЕМАТИЧКИ ЛАВИРИНТ

1. Збирката на добри практики во и надвор од Европа претставува електронска база на податоци. Оваа збирка на добри практики се состои од материјали за учење и подучување математика кои се релевантни за возраста и интересот на учениците и истите се прикачени на веб-платформата за користење и работа во иднина. Збирката содржи веб-платформи, курсеви, натпревари, книги, публикации и проекти кои се сметаат за добри практики во и надвор од Европа и достапна е на следниов линк: http://www.math-labyrinth.eu/o1/collection/

2. Книгата Математички лавиринт е онлајн платформа каде наставниците и учениците можат да учат и заедно да креираат содржини за учење и подучување. Математичките области кои се содржински покриени во оваа книга се во согласност со наставните планови и програми. Интерактивната книга има за цел да ја поттикне способноста на мозокот да го визуелизира проблемот и да го примени претходното знаење за решавање на проблеми од реалниот живот. Со користење на Интерактивната книга, на учениците ќе им се даде можност да почувствуваат поголема самодоверба за да почнат да ги работат задачите и да ги решаваат проблемите, бидејќи Интерактивната книга им овозможува работа чекор по чекор. Методот Математички лавиринт им дава помош и насоки на учениците. Интерактивната книга е достапна на следниов линк: http://www.math-labyrinth.eu/math-labyrinth-interactive-book/

3. Прирачникот за методот Математички лавиринт е наменет за наставниците кои ќе го применуваат овој метод на учење во нивната училница како како наставна или воннаставна активност. Тој ги покрива целите на интерактивната книга, методологијата на доаѓање до решение на математички проблеми од реалниот живот, наставни планирања за час и некои корисни линкови, ресурси и објаснувања за користење на различни ИКТ-алатки.

4. Евалуацискиот извештај за Математичкиот лавиринт содржи формулари и анализи на извештаи во врска со проектот, работата, активностите за време на часовите, летните кампови во училиштата и состаноците.

5. Структурираната обука е четиридневен тренинг-курс за сите наставници кои се заинтересирани за применување на овој метод. Овој курс е објавен како

обука за наставници во клучна акција КА1 за мобилност на наставен кадар и може да се најде на веб-страната на проектот и на други сајтови.

МЕТОДОЛОГИЈА НА РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМИ

Цели на математиката

Математиката е „кралица на науките“, - дефиниција која потекнува од моќта и брилијантноста на резултатите.

Секоја научна дисциплина, од инжинерство до физика, од економија до информатичка технологија, применува голем број алатки за анализа, пресметување и моделирање, понудени од математиката.

Како одраз на човековиот ум, математиката ја рефлектира активната волја, логичкото размислување, желбата за естетска перфекција. Нејзини клучни елементи се логиката и интуицијата, анализата и конструкцијата, севкупноста и индивидуалноста.

Математиката е предизвик за учениците. Помладата генерација, која живее и дише со телевизијата и интернетот, не поседува способност за интензивна и подолга концентрација која е потребна за решавање проблеми кај комлексни предмети како што е математиката.

Но, ако учениците не ја сакаат математиката, тие на некој начин се жртви на застарени наставни програми полни со некои жаргонски изрази, жртви на бескорисни и досадни наставни методи што треба да се ревитализираат, обноват и модернизираат. Единствен начин да се разбере и да се увежбува математиката е да се спојат разумот и логиката во еден вид „втора природа“.

Всушност, за математиката ќе може да се зборува без страв: ова е и целта на едуцирањето на учениците според „математички модели“. Тоа вклучува различен начин на изучување на математиката, а со цел да се опише и да се разбере реалниот свет.

За нас е многу важно да ги научиме основите на математиката, без оглед на тоа колку ни се чини дека е тешко. Ние секојдневно и насекаде околу нас се соочуваме и се занимаваме со математика. Затоа математиката е навистина од суштинско значење за опстанокот и напредок на секоја индивидуа.

Главните цели на математичкото образование се да ги подготвуваат учениците да:

- решаваат проблеми;
- комуницираат и резонираат математички;
- наоѓаат поврзаност на математиката со нејзината примена;
- станат математички писмени;
- ја ценат и вреднуваат математиката;
- донесуваат аргументирани одлуки како чинители во општеството.

Затоа, ние мораме да ја промовираме математиката преку проблемско решавање на задачи во училиштето, со цел да се подобри успешноста на учениците и да се продлабочи учењето.

Техники за решавање проблеми

Кога велиме решавање проблеми, не се ограничуваме само на размислување за математички проблеми, туку во предвид ја имаме пошироката цел на образованието, односно да ги мотивираме учениците да се стекнат со вештини за решавање проблеми.

Математичките проблеми може да се решат процесно, со користење на вештини креативно во нови ситуации.

Затоа можеме да речеме дека решавањето проблеми е математички процес. Ова е убавината на математиката што ни овозможува да ги применуваме нашите вештини во една широка палета ситуации.

Џорџ Полиа ја напишал книгата „Како да се реши“ во 1945 година, како еден општ прирачник за решавање математички, но и нематематички проблеми, опишувајќи четири фази за решавање на проблемите.

Прв принцип на Полиа: Разбирање на проблемот

Не е возможно еден ученик да реши некој проблем доколку тој најпрвин не го разбира. Речиси секогаш е неопходно да се прочита проблемот неколку пати, како на почетокот, така и во текот на работата на него. Некои од прашањата кои се поставуваат во оваа фаза се:

- Дали ги разбираш сите зборови кои се употребени во проблемот?
- Дали знаеш што е дадено?
- Дали има доволно информации кои ќе ти овозможат да дојдеш до решение?
- Можеш ли да го парафразираш проблемот со свои зборови?
- Можеш ли да визуелизираш слика или дијаграм кои би ти помогнале да го разбереш проблемот?
- Дали овој проблем е сличен на некој кој веќе си го решил?

Втор принцип на Полиа: Разработи план (Пронајди стратегија)

Постојат многу погодни начини за решавање проблеми. Вештината за избирање на најсоодветната стратегија најдобро се учи и развива преку решавање многу проблеми. Тогаш изборот на стратегија станува сè полесен и полесен. Еве една делумна листа на стратегии:

- Погоди и провери
- Користи променлива
- Направи листа
- Елиминирај ги можностите
- Користи симетрија
- Разгледај посебни случаи
- Користи директно резонирање
- Реши равенка
- Направи симулација
- Нацртај слика
- Побарај шема
- Реши поедноставен проблем
- Нацртај дијаграм
- Користи модел
- Работи наназад
- Користи формула
- Биди оригинален
- Користи координати

Трет принцип на Полиа: Спроведи го планот

- Примени стратегија или стратегии кои си ги одбрал додека да дојдеш до решение или додека не се сугерира некоја нова активност.
- Дај си доволно време за решавање на проблемот. Ако не си успешен, побарај насоки од другите или остави го решавањето на проблемот за подоцна.
- Не се плаши да почнеш одново. Често пати, нов почеток и нова стратегија ќе те донесат до успех.

Четврти принцип на Полиа: Наврати се кон решенијата на проблемот

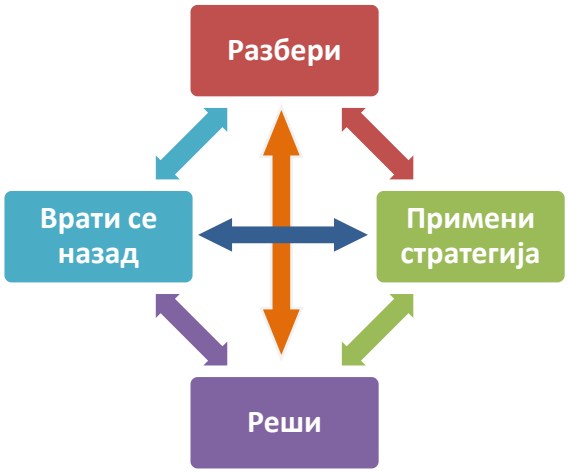
Ако се навратиш кон решението на проблемот, ќе знаеш што точно си сработил, а што не е точно. Ова ќе ти помогне да предвидиш која стратегија да ја примениш за некои идни проблеми.

- Дали твоето решение е точно? Дали твојот одговор ги задоволува барањата на проблемот?
- Можеш ли да најдеш полесно решение?
- Можеш ли ова решение да го прошириш врз некој поопшт пример?

Овој дијаграм се однесува на процесот на решавање на проблеми со математика.

Можеби движењето низ четирите фази на проблемско решавање по хронолошки редослед и наоѓање решение нема да биде толку лесно за посложените проблеми. Затоа често пати се случува учениците да се движат напред-назад низ чекорите.

Она со што учениците обично се соочуваат во практиката е покажано на овој дијаграм:



Методологија на Математичкиот лавиринт

Методот Математички лавиринт претставува стратегија за решавање проблеми од реалниот живот со помош на математика, насочувајќи ги и помагајќи им на учениците чекор по чекор. Методот Математички лавиринт е пристап во чиј центар се наоѓа ученикот, бидејќи учениците се активни учесници во нивното сопствено учење.

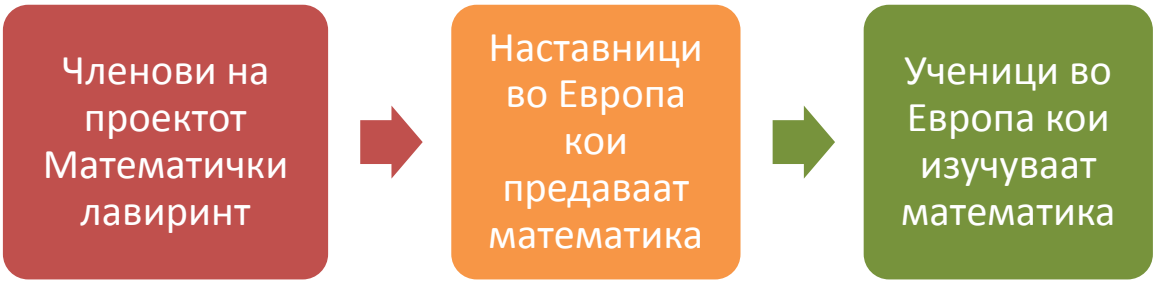
Името „Лавиринт“ се однесува на сложеноста во процесот на доаѓање до решение; со цел да се решат проблеми од ваков вид, неопходни се неколку операции, па учениците ќе мораат да се навраќаат на претходно стекнатото знаење во текот на нивното образование. За подобро разбирање на проблемите, методот Математички Лавиринт вклучува визуелизација на проблемите, применувајќи слободен софтвер „Геогебра“.

Целта на интерактивната книга не е да им даде директни одговори на учениците, туку да ги поттикне да мислат и да учат во исто време. При тоа, тие треба да ги користат најчестите операции и релации и истите да ги применат

во секојдневниот живот. Учениците ќе препознаат дека математиката е насекаде околу нас. Тие ќе ја почитуваат корисноста, моќта и убавината на математиката и ќе развијат трпеливост и истрајност во решавањето на проблеми.

ПРИДОБИВКИ ЗА НАСТАВНИЦИТЕ И УЧЕНИЦИТЕ КОИ ГО КОРИСТАТ МЕТОДОТ МАТЕМАТИЧКИ ЛАВИРИНТ

Таргет групи на Еразмус + проектот Математички лавиринт



- подобрени компетенции и иновативен пристап во изучувањето на математиката;
- подобрени компетенции за основните вештини кај ученици со ниски постигнувања преку поефективни методи на учење;
- зголемена интеграција на основните вештини на учење математика, со промовирање на учење базирано на решавање проблеми;
- зголемен степен на користење на ИКТ-методологии за учење на математика со поатрактивна едукација;
- подобрен пристап за учење преку отворени едукациски ресурси (OER);
- зголемена мотивација и задоволство во секојдневната работа.

Влијание врз целните групи

А) Ученици

- зголемено знаење по математика преку иновативни пристапи во учењето и подучувањето;

- можност за учениците да учат математика преку интерактивни и ефективни методи и техники на работа;
- зголемен пристап до ИКТ, слободен софтвер и отворени едукациски ресурси;
- зголемен пристап до онлајн платформата со математички задачи, методи и интерактивни проблемски задачи кои ќе го олеснат процесот на учење;
- зголемени можности за комуникација со други ученици од различни земји-учеснички преку онлајн платформа со цел да добијат дополнителни информации, програми, алатки и сл.;
- зголемен степен на дигитална компетенција, особено во однос на отворени образовни ресурси и онлајн платформата;
- ученици кои ќе сакаат да учат математика;
- позитивен став во однос на нивното образование и улогата на образованието за нивните идни кариери.

Б) наставници по математика (и други наставници во средното образование)

- подобрени компетенции за иновативен пристап при подучувањето математика;
- подобрени компетенции за подучување на основните вештини кај ученици ниски постигнувања преку поефективни методи;
- повисоко ниво на интегрираност при подучувањето на основните математички вештини, промовирајќи учење базирано на решавање проблеми;
- зголемено користење на ИКТ-базирани методологии за учење математика и овозможување на поатрактивна едукација по математика;
- поголем пристап до ООР и ИКТ-алатки базирани на научни информации како и меѓународна соработка за користење на нивните активности, вклучувајќи нови наставни методологии;
- зголемена дигитална компетенција, особено во однос на ООР и онлајн платформата.

ШТО Е МАТЕМАТИЧКИ ЛАВИРИНТ

Создавањето на оваа интерактивна е-книга за примарна цел има на учениците во средното образование да им даде алатка со помош на која ќе ги надминат потешкотиите со кои се соочуваат при учењето математика. Ова е алатка што ќе се обиде да го премости јазот меѓу апстрактните содржини на математиката и реалниот живот.

Сите проблеми во е-книгата се проблеми од „реалниот живот“ на кои учениците наидуваат во текот на нивното образование, па сѐ до последните испити на средното училиште.

Не е лесно да се решаваат проблеми, особено не оние за кои е потребно применување на комбинирани знаења. Затоа, е-книгата користи еден метод, методот Математички лавиринт, кој содржи сугестии за тоа како може да се решат овие проблеми. Тоа е метод кој на учениците им овозможува да дојдат до решение на проблемот благодарение на овие сугестии.

Секој проблем од реалниот живот, од наједноставниот до најсложениот е измоделиран. Кога ученикот се соочува со еден проблем, тој ќе биде поканет да го реши сам. Ако не може да направи математички модел што го опишува проблемот, тој ќе добие помош што ќе го води се до изнајдувањето на решението. Првата помош е во форма на информација, графикон или линк.

Откако учениците ќе побараат насока во решавањето, тие ќе можат да продолжат или да го проверат одговорот на дадената насока. Потоа, тие можат да продолжат кон следната сугестија и така, чекор по чекор, сѐ до решавање на проблемот.

Практично, методот Математички лавиринт го води ученикот да може во контекстот на реалниот живот, да препознае израз, формула, равенка или функција, која може да се третира како алатка: така решавањето на проблемот од реалниот живот се поврзува со решавање на математички проблем.

МАТЕМАТИЧКИОТ ЛАВИРИНТ ВО „ГЕОПЕДАГОШКА“ ПЕРСПЕКТИВА НА ДОЖИВОТНОТО УЧЕЊЕ

Европските држави споделуваат иста стратегиска цел во образованието, без разлика на различностите во нивниот образовен систем и образовната политика: на учениците да им се овозможи да станат автономни и независни во учењето, да заземат активно учество во општеството и да придонесат за иден развој и општествена кохезија на Европската Унија. Ова доаѓа од клучниот приоритет на образованието да ѝ помага на младата личност целосно да го развие својот потенцијал и да стане активен учесник во општеството.

Освен тоа, на учењето се гледа како на доживотен процес, кој никогаш не престанува. Без разлика на која возраст сме: потребно е да ги развиваме нашите вештини и компетенции во текот на животот, како за професионална сатисфакција, така и заради потребата да се биде успешен во светот на бизнисот кој постојано се менува.

Овие стратешки претпоставки ја направија „геопедагошката“ срж на Препораката на Европскиот парламент и на Советот за клучни компетенции кај доживотното учење, од 18 декември 2006 година.

Во неа се поставени минимумот знаење, вештини и ставови кои сите ученици треба да ги стекнат до крајот на нивната иницијална едукација или обука, ако од нив се очекува да станат автономни и независни во учењето. Тие се наречени „клучни компетенции“. Како комбинација од знаење, вештини и ставови кои се адекватни за контекстот, тие го отвораат патот кон личниот развој, активното граѓанство и вработување.

Математичката компетенција е една од осумте клучни компетенции поставени од Препораката од 2006 година. Како клучна компетенција, акцентот

е ставен врз процесот и активноста, како и врз знаењето; личноста која развива математичка компетенција е некој кој има сособност да го примени математичкото размислување за решавање широк спектар проблеми во секојдневниот живот.

Секако, развивањето на ваквата компетенција, подразбира таков пристап во учењето кој ги надминува границите на традиционалниот пристап и сфаќањето дека – да се биде математички компетентен, значи само да се знаат концепти, термини, теми, резултати и методи.

Според претпоставките на некои математичари (пр. Ханс Фројдентал и Хајнрих Винтер меѓу првите), математичката извонредност се занимава со функционалната примена на математиката, која е над фактичкото знаење и процедуралните вештини. Таа всушност содржи нивоа на когнитивно однесување, способност за ангажираност околу решевањето на проблемот, вклучувајќи самоучење и сфаќање на основните феномени во природата, општеството и културата.

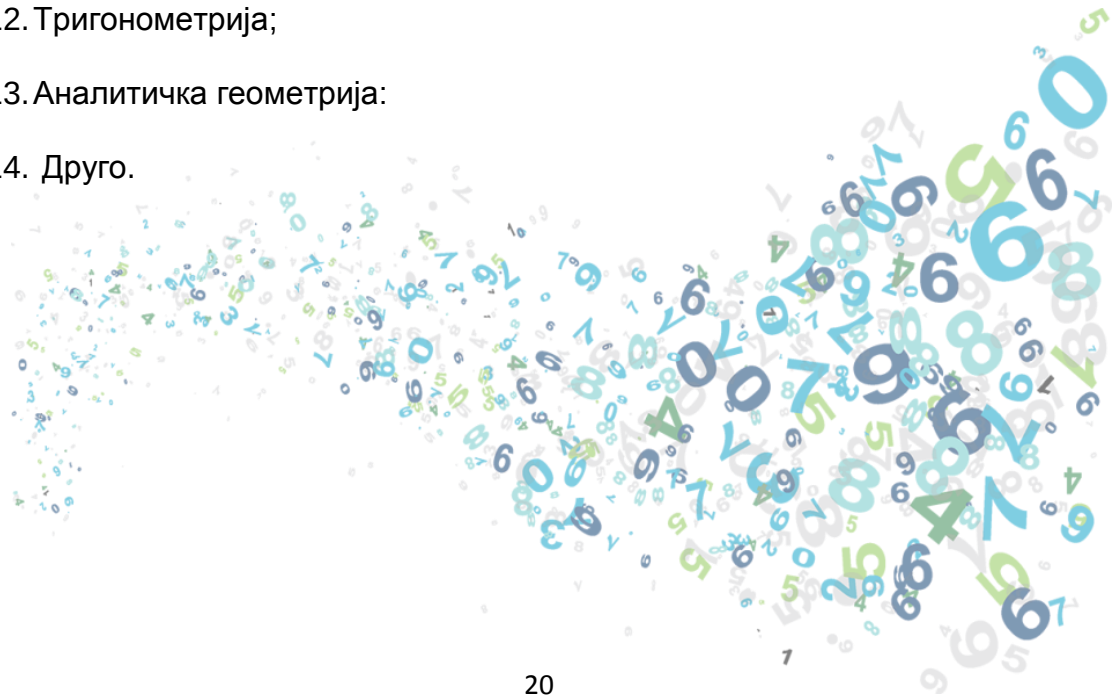
Со ваков контекст и перспектива, Математичкиот лавиринт станува иновативна и предизвикувачка алатка за учење, како и стратегија за развивање на математичките компетенции на една личност.

DISCOVER THE 8 KEY COMPETENCES FOR LIFELONG LEARNING
COMMUNICATION IN THE MOTHER TONGUE
The ability to express and interpret concepts, thoughts, feelings, facts and opinions in both oral and written form (listening, speaking, reading and writing) and to interact linguistically in an appropriate and creative way in a full range of societal and cultural contexts
01
COMMUNICATION IN FOREIGN LANGUAGES
Involves, in addition to the main skill dimensions of communication in the mother tongue: mediation and intercultural understanding. The level of proficiency depends on several factors and the capacity for listening, speaking, reading and writing
02
MATHEMATICAL COMPETENCE AND BASIC COMPETENCES IN SCIENCE AND TECHNOLOGY
The ability to develop and apply mathematical thinking in order to solve a range of problems in everyday situations, with the emphasis being placed on process, activity and knowledge. The mastery, use and application of knowledge and methodologies that explain the natural world
03
DIGITAL COMPETENCE
Involves the confident and critical use of information society technology (IST) and thus basic skills in information and communication technology (ICT)
04
LEARNING TO LEARN
Is related to learning, the ability to pursue and organise one's own learning, either individually or in groups, in accordance with one's own needs, and awareness of methods and opportunities
05
SOCIAL AND CIVIC COMPETENCES
Refers to personal, interpersonal and intercultural competence and all forms of behaviour that equip individuals to participate in an effective and constructive way in social and working life. Equip individuals to engage in active and democratic participation
06
SENSE OF INITIATIVE AND ENTREPRENEURSHIP
Is the ability to turn ideas into action. It involves creativity, innovation and risk taking, as well as the ability to plan and manage projects in order to achieve objectives. It is the foundation for acquiring more specific skills and knowledge needed by those establishing or contributing to social or commercial activity.
07
CULTURAL AWARENESS AND EXPRESSION
Involves appreciation of the importance of the creative expression of ideas, experiences and emotions in a range of media (music, performing arts, literature and the visual arts)
08

СОДРЖИНИ НА ИНТЕРАКТИВНАТА КНИГА

Математичките области кои се покриени со содржините на оваа книга се релевантни на секојдневни ситуации и на наставните планови и програми во средното образование. Вежбите во неа имаат различни тежински нивоа, од лесни до посложени. Сите вежби се поделени во 14 категории:

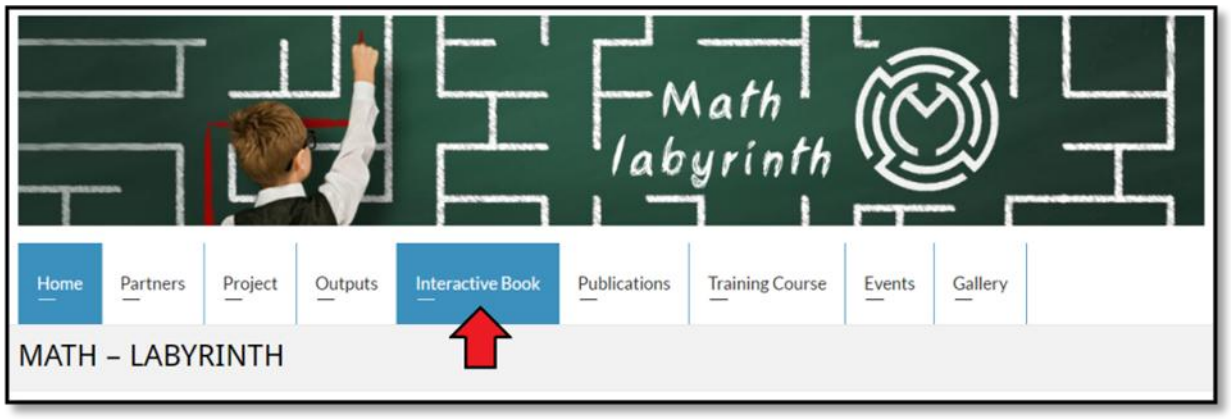
1. Равенки, неравенки и систем на равенки;
2. Конструкција на триаголници и квадрати;
3. Функции и нивна примена;
4. Пропорции на величини;
5. Периметар и плоштина на рамнински фигури;
6. Плоштина и волумен на тела;
7. Диференцијално сметање;
8. Определен интеграл и примена;
9. Комбинаторика;
10. Веројатност;
11. Низи и прогресии;
12. Тригонометрија;
13. Аналитичка геометрија:
14. Друго.



КАКО СЕ КОРИСТИ МАТЕМАТИЧКИОТ ЛАВИРИНТ

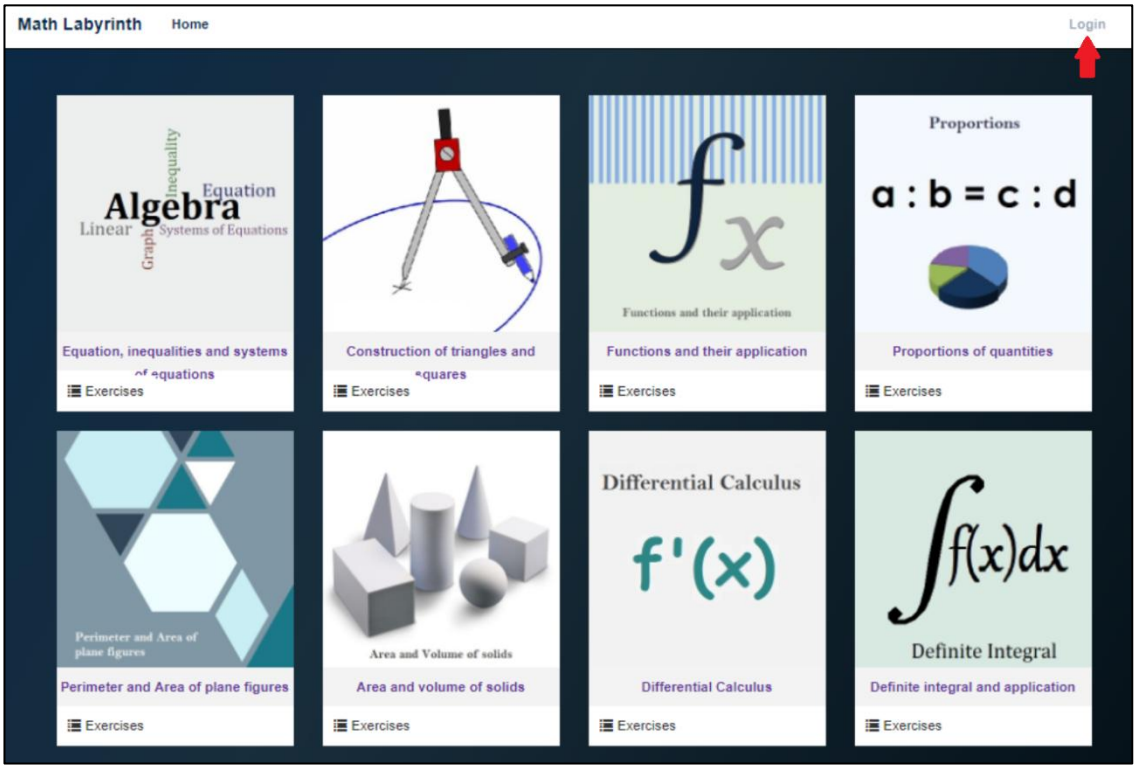
Впиши http://www.math-labyrinth.eu/ на твојот пребарувач

Кликни на Интерактивна книга



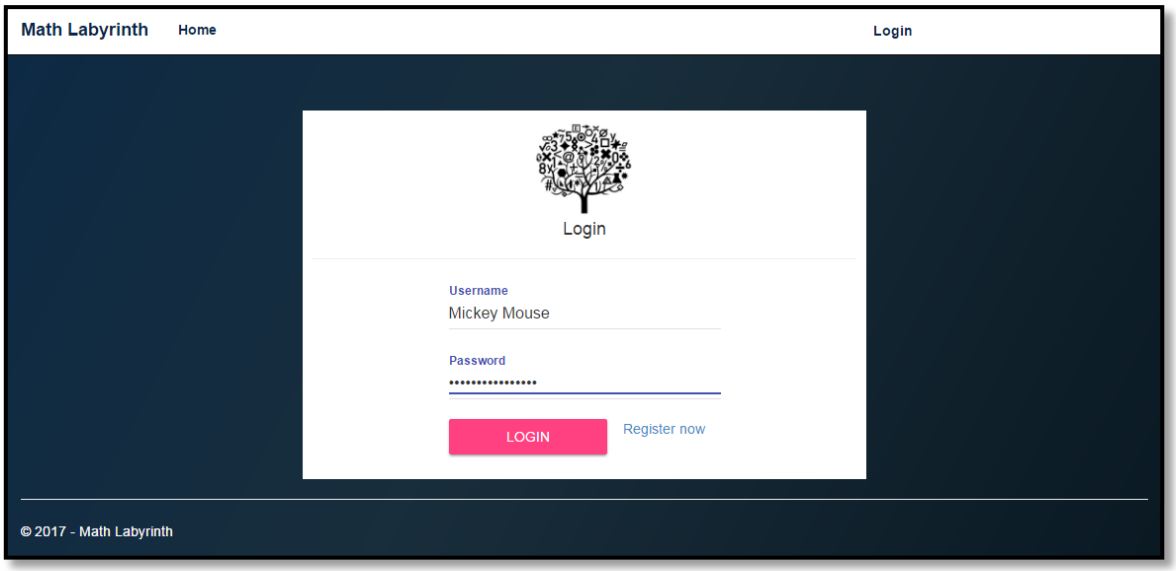
Пристап до книгата Математички лавиринт

Логирај се за пристап до вежбите



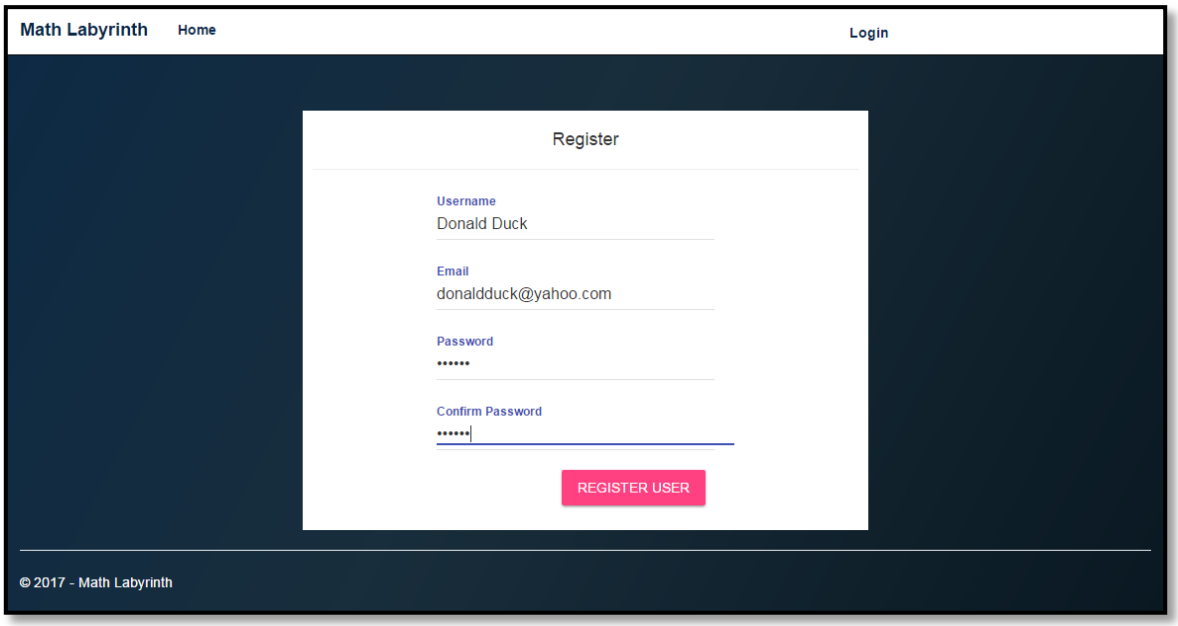
Логирај се со твоето корисничко име и лозинка

Ако не си корисник, регистрирај се сега

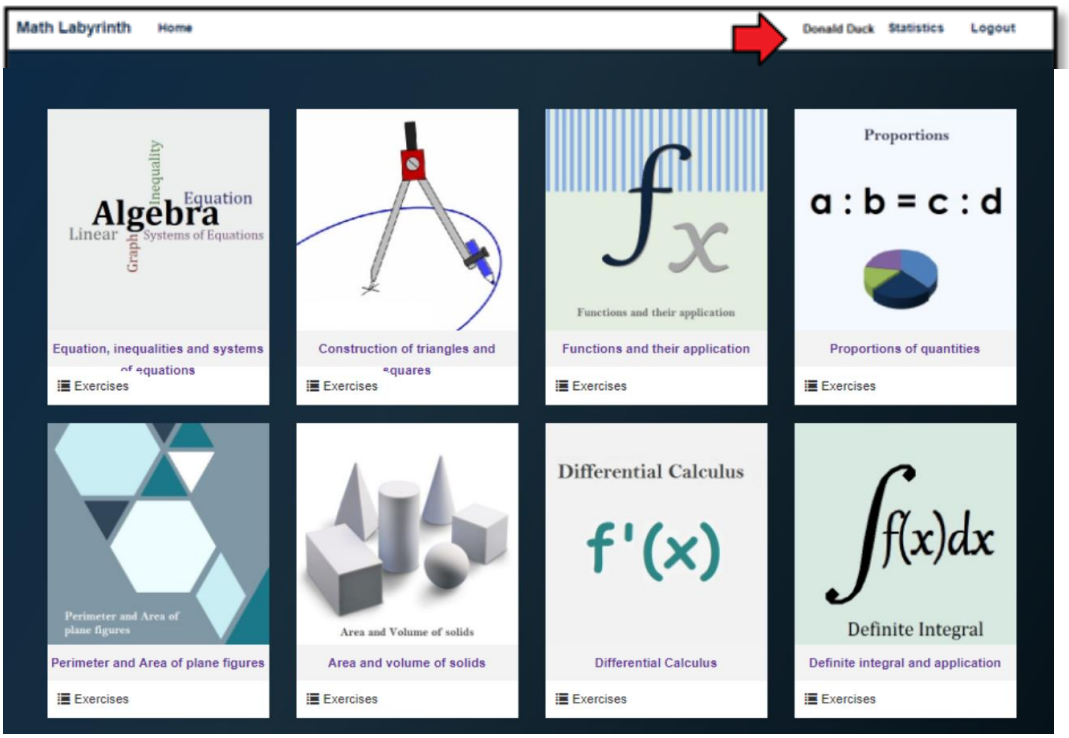


Одбери корисничко име и впиши го твојот e-mail

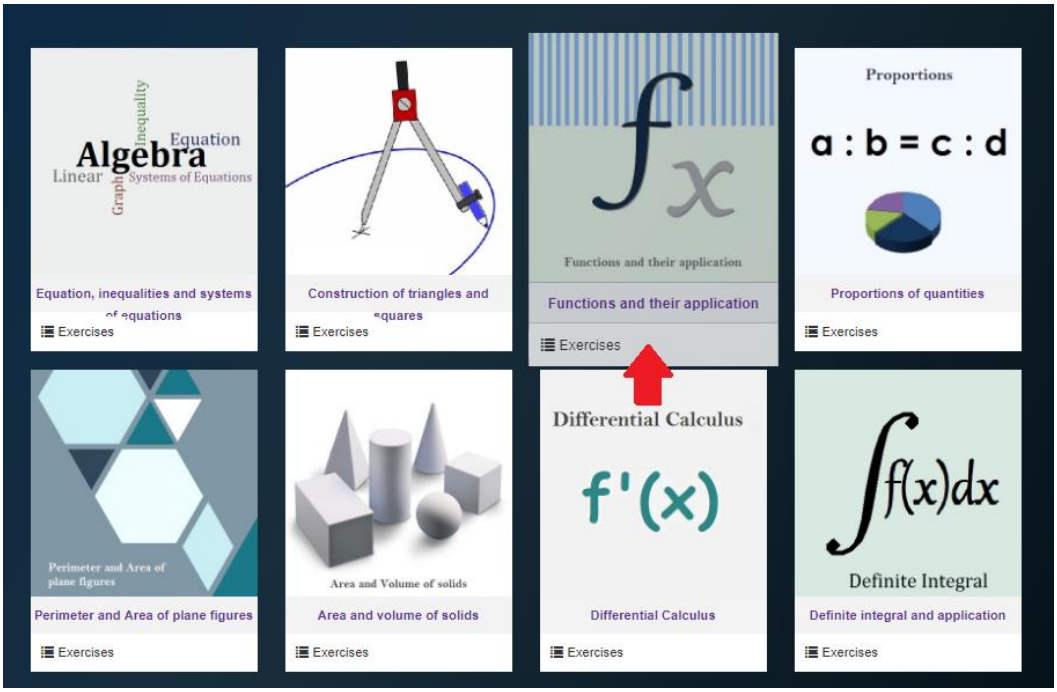
Избери лозинка и потврди ја



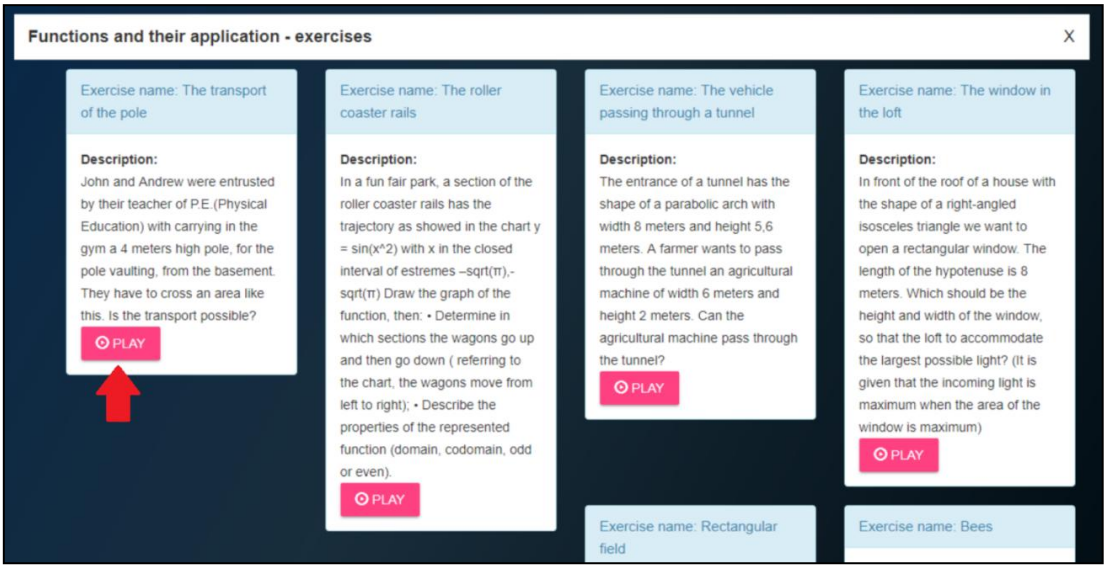
Твоето корисничко име ќе се појави на горниот дел од прозорецот



Одбери категорија на вежби...

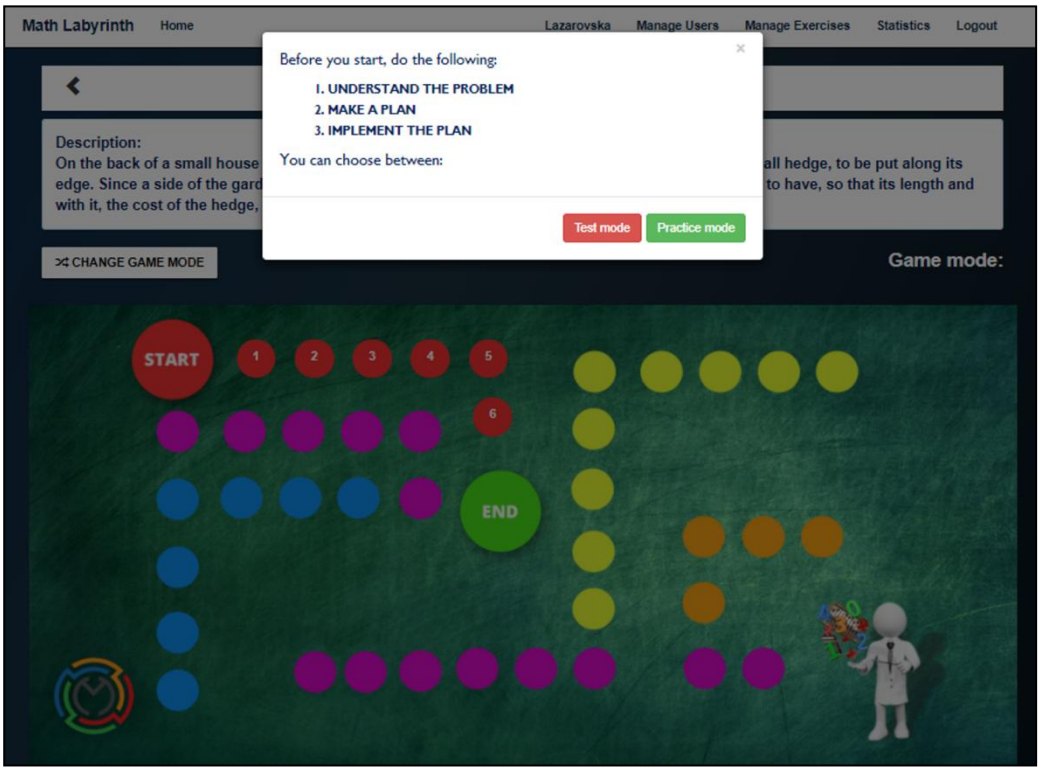


… а потоа вежба што ја сакаш

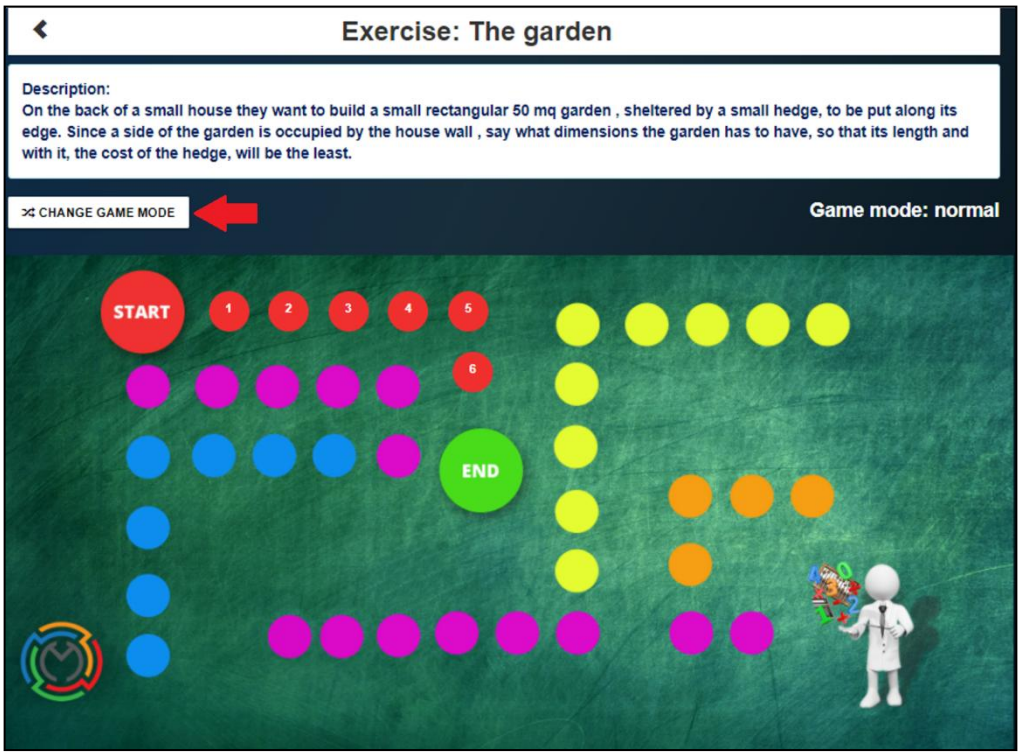


Можеш да избереш помеѓу два начина на решавање:

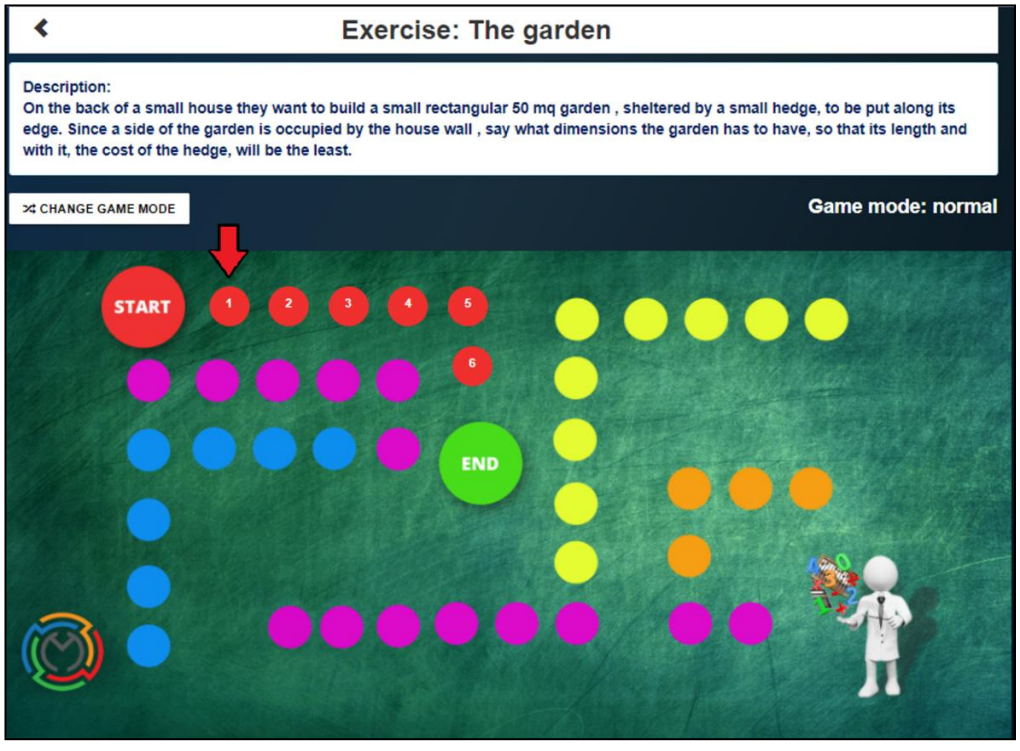
Test mode и **Practice mode.**



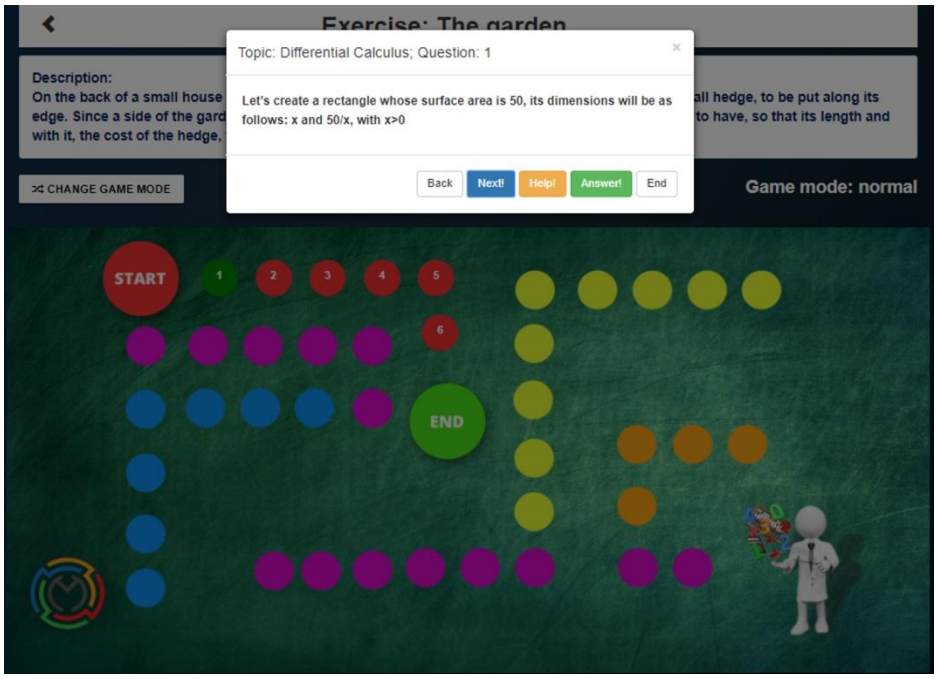
Во текот на решавањето можеш да го промениш начинот на решавање



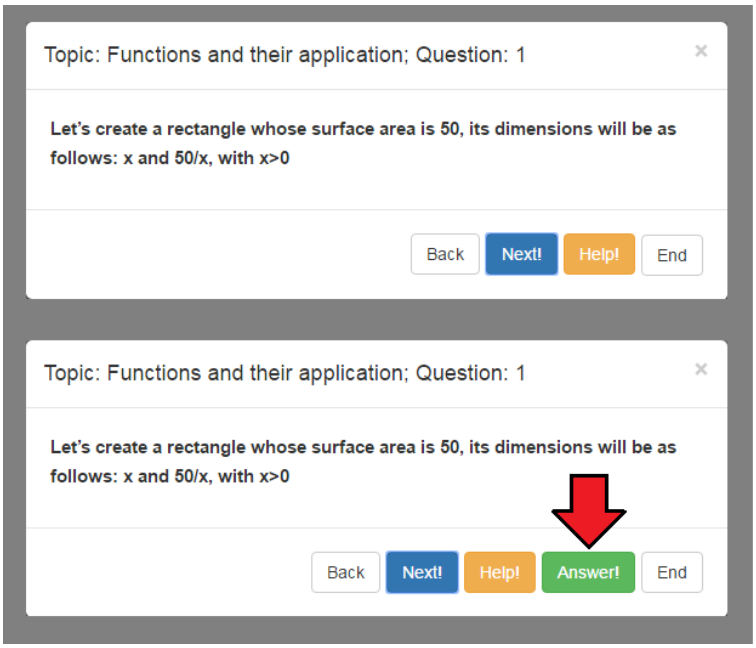
Бројките ги претставуваат чекорите што се потребни да се поминат, за да се реши проблемот



Со клик на некој број, се појавува прозорец со сугестии



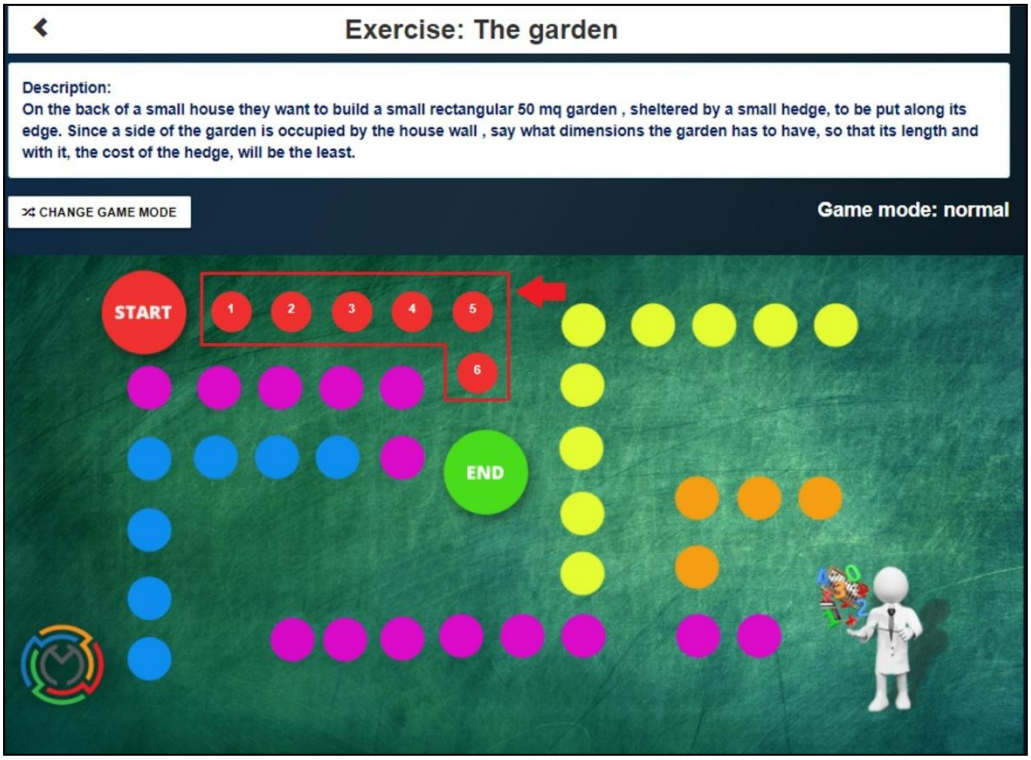
Одговор можеш да добиеш во **Practice Mode**



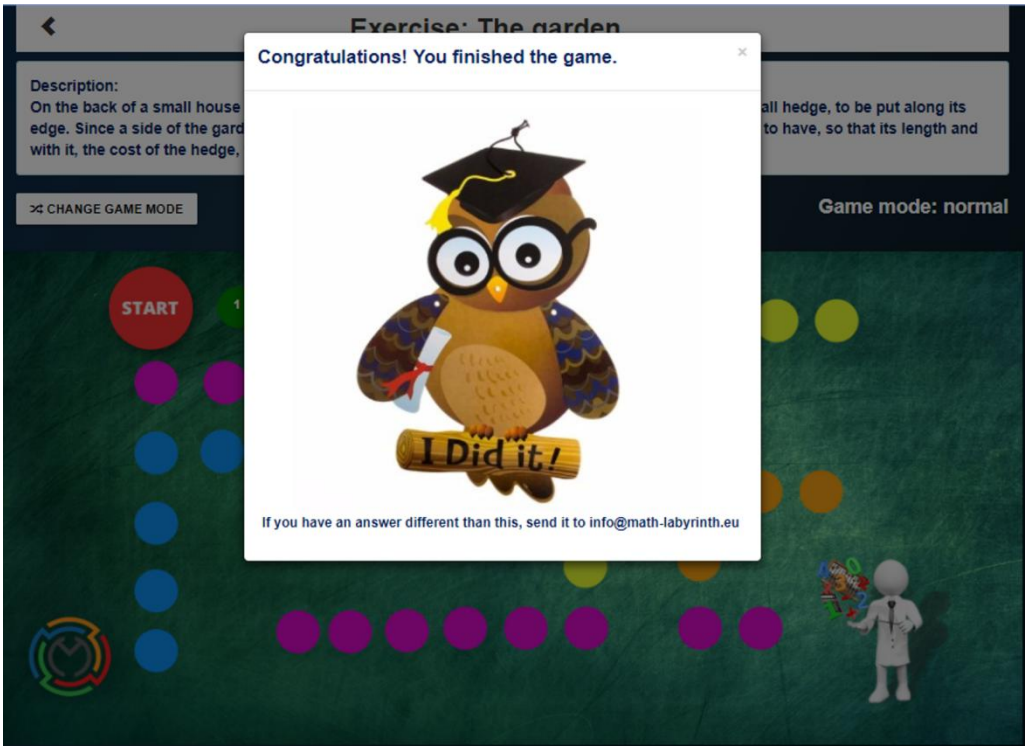
Test Mode

Practice Mode

Продолжи на истиот начин и со другите чекори

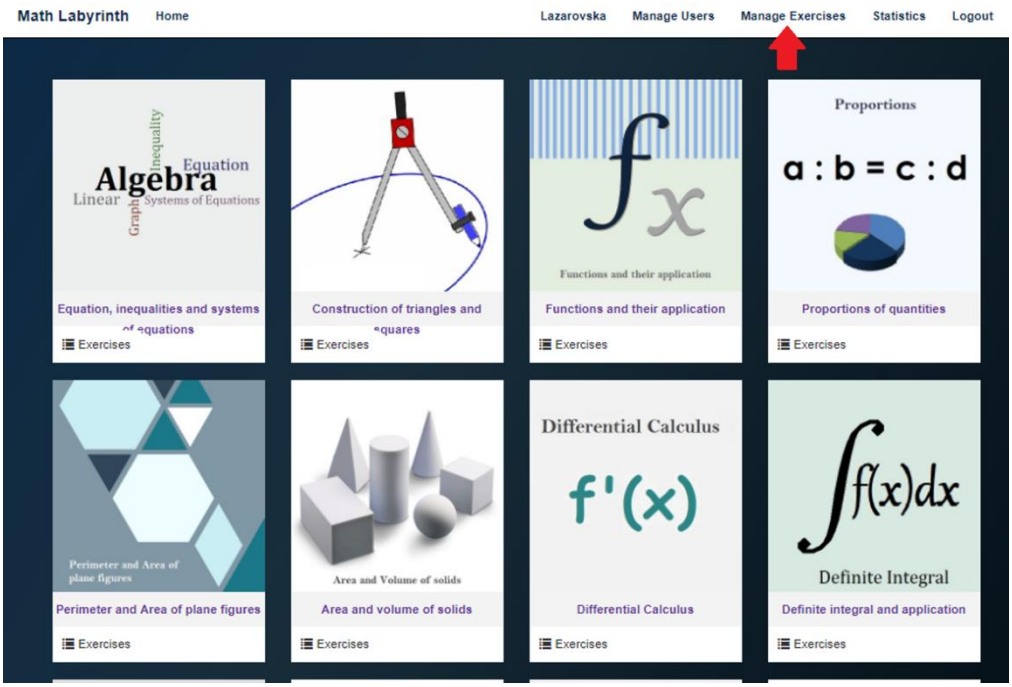


Овој прозорец покажува дека задачата е решена

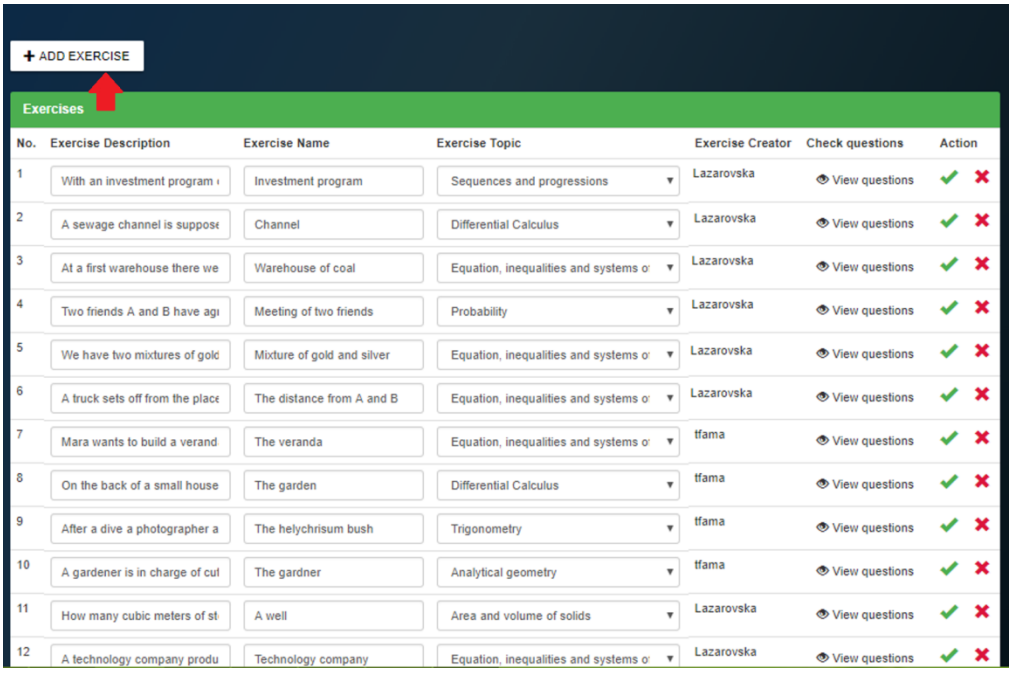


Додавање на вежба

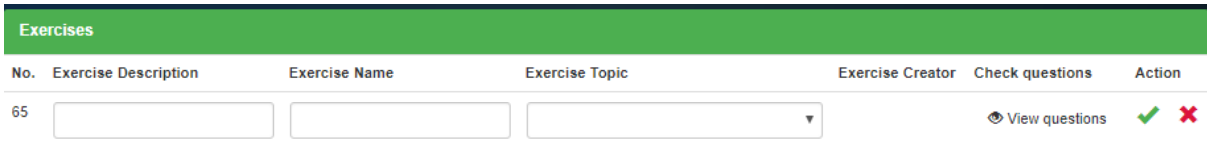
За да се додаде вежба во Интерактивната книга, корисникот треба да има улога на администратор. По регистрирањето и добивањето на дозвола за администратор, корисникот треба да кликне на **Manage Exercises**



Потоа кликни на **ADD EXERCISE**

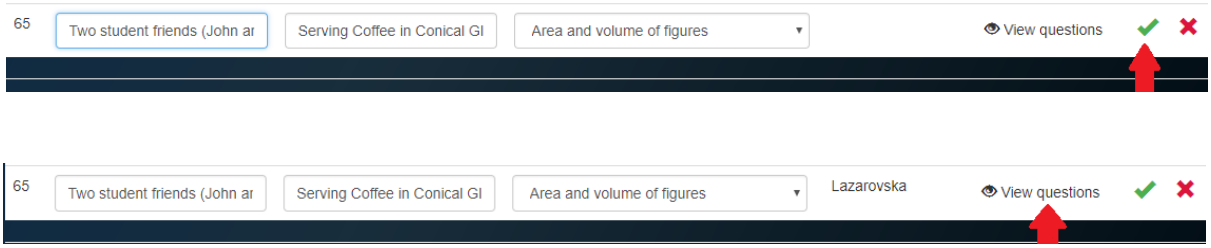


Ќе биде додаден нов ред со следниве полиња: **Опис на вежба (Exercise description), Име на вежба (Exercise Name)** и **Тема на вежби (Exercise Topic)**

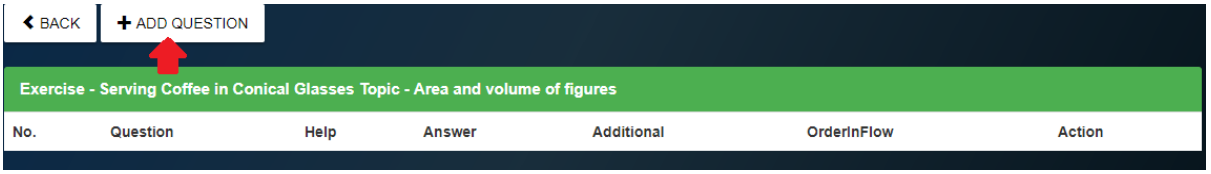


Опис на вежба е текстуален опис на вежбата, **Име на вежбата** е кратко име на вежбата, а **Темата на вежбата** може да се избере од четиринаесетте дадени категории.

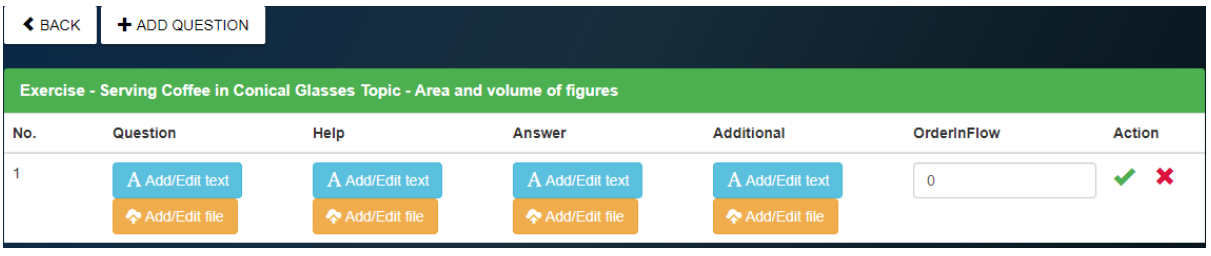
По пополнувањето на сите полиња избери **Action** за да ја зачуваш вежбата и кликни на **View questions.**



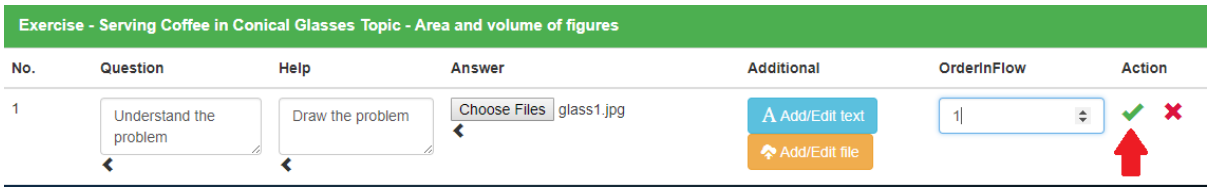
За да додадеш нов чекор/прашање во вежбата, кликни на **ADD QUESTION**



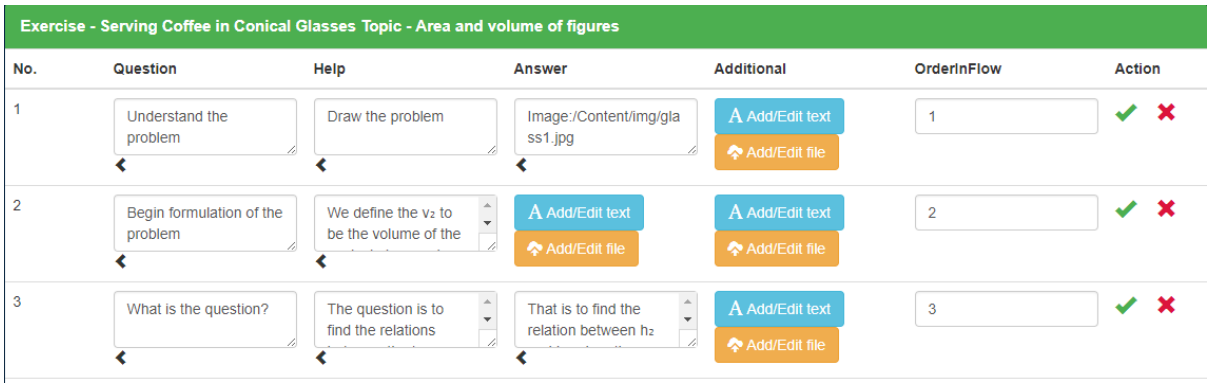
Ќе ти се појави овој прозорец



За секое прашање администраторот може да додаде **прашање/чекор**, **помош**, **одговор** и **дополнителни информации**. Текстот и формулите во латекс можат да се додадат од полето **Add/Edit text,** фајл со слика може да се додаде од полето **Add/Edit file**. **OrderInFlow** го претставува редоследот на прашањето/чекорот во вежбата и почнува со 1.



По пополнувањето на полињата кликни на **Action** за да го зачуваш прашањето и повтори го истото за наредните прашања/чекори.



По завршувањето на сите прашања/чекори, администраторот може да ја прегледа вежбата со кликање на **Home** и одбирање категорија на која ѝ припаѓа вежбата, па потоа кликнува на копчето **Play**

НАЧИН НА РЕШАВАЊЕ ЗАДАЧИ – ПРИМЕРИ

ПРЕДЛОГ- ПЛАН ЗА ИЗВЕДУВАЊЕ НА ЧАС ВО ОБЛАСТА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ

ПРОБЛЕМ: „Обновена куќа“

ЦЕЛНА ГРУПА: 17-годишни ученици

ПРЕТХОДНИ УСЛОВИ (знаење и способности потребни за справување со разбирањето на проблемите):

- Што е квадратна функција?
- Што е парабола?
- Кои се нејзините основни точки и својства?
- Употреба на калкулус за да се најдат локален минимум и максимум на функција
- Да можат да решаваат симултани равенки.

НАСТАВНИ ЦЕЛИ:

- да го трансформира текстуалниот проблемот во математички проблем;
- да применува калкулус во реални животни ситуации.

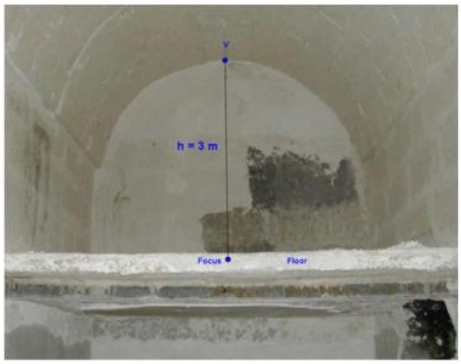
АЛАТКИ И МАТЕРИЈАЛИ:

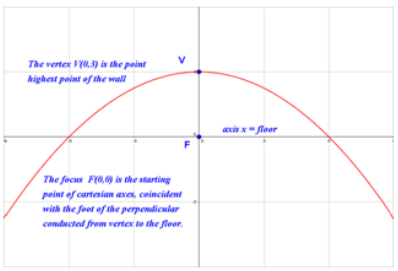
- Интерактивна книга;
- Прирачник за методот Математичли лавиринт;
- Геогебра апликација;
- Цртежи.

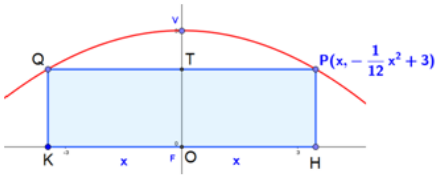
ПРОБЛЕМ:

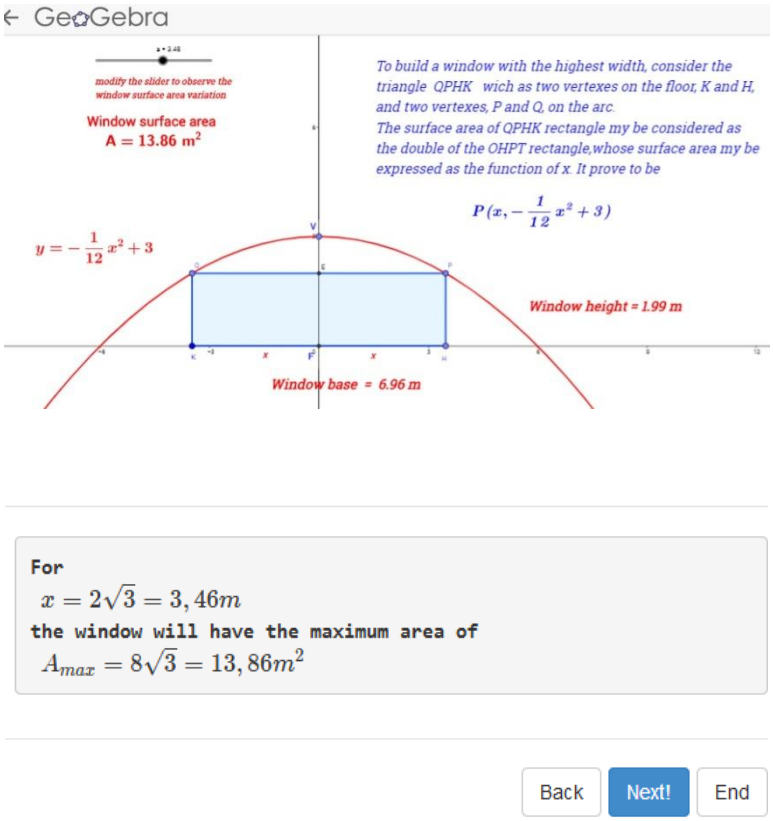
На стара куќа треба да се реставрира уште еден кат чии ѕидови се прилично високи и имаат свод во вид на лак. Лакот е параболичен, чија максимална висина од подот е 3 метри и се пресметува од точка на подот кој може да се смета за фокус на параболата. Тие сакаат да отворат прозорец на новиот горен кат, чиј надворешен ѕид е заоблен, така што да може да влегува што е можно повеќе воздух. Кои димензии треба да ги има прозорецот?

НАСТАВЕН ЧАС

1. Им се покажува на учениците цртеж за дадениот проблем, така тие ќе можат да видат визуелно и подобро да го разберат проблемот. За да го направите тоа, само кликнете на **(Помош) HELP**	 Back Next! Answer! End
2. Учениците ќе бидат насочени да го постават проблемот.	**Consider the house arch as the parabola that has its vertex in the highest point of the wall, V (0,3) and its focus in O (0,0), coincident with the foot of the perpendicular, conducted from the vertex to the floor.** Back Next! End
3. Откако тие ќе ја сфатат геометриската фигура (параболата), им се дава насока да ја пресметаат равенката со дадено теме и фокус. Втората **помош** им се дава за да се присетат на формулите кои треба да се користат.	Calculate the equation of the parabola, $y = ax^2 + bx + c$ Back Next! Help! Answer! End **We know vertex and focus as well as the following relations:** $V(-\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{4a})$ $F(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a})$ **where** $\Delta = b^2 - 4ac$ Back Next! Answer! End

4. Може да го поставите системот....	**Set up the system** $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 0 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 3 \\ \frac{1-\Delta}{4a} = 0 \end{cases}$ Back Next! End
5. …кога ќе се реши…	$\begin{cases} b = 0 \\ \Delta = -12a \\ \Delta = 1 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} b = 0 \\ a = -\frac{1}{12} \\ b^2 - 4ac = 1 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} b = 0 \\ a = -\frac{1}{12} \\ b^2 - 4ac = -12a \end{cases}$ Back Next! Answer! End **and substituting into the second equation the values of a and b, it appears that** $a = -\frac{1}{12}; b = 0; c = 3$ Back Next! End
6. ...ќе може да се напише равенката на параболата.	 Back Next! Answer! End

	$y = -\frac{1}{12}x^2 + 3$ **it is the arch equation** Back Next! End
7. Сега учениците можат да ја нацртаат параболата на лакот за прозорецот со максимала површина...	 Back Next! End
8. …и да ја пресметаат површината на правоаголникот запишана како функција од x (координатите на P точка на лакот на параболата).	Topic: Differential Calculus; Help: 6 **The surface area of the rectangle PQKH is the double of the OHPT rectangle** Back Next! Answer! End $A(x) = KH \cdot PH = 2x(-\frac{1}{12}x^2 + 3)$ **i.e.** $A(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 6x$ Back Next! End
9. Им се дава помош како да ја пресметаат вредноста на X за која површината ќе биде максимална. Во овој чекор се се применува извод на функција. Се пресметува прв извод .	**Do the first derivative of A(x) and find out the value of the x by which it is made null.** Back Next! Answer! End $A'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6 = 0$ $x = \pm 2\sqrt{3}$ Back Next! End

10. Употребата на софтверот Геогебра е многу ефикасен начин да се визуелизира добиениот резултат. Учениците можат да го добијат решението на проблемот со помош на графикот. Сепак, тие може да ја погледнат визуелизацијата на дадениот линк.	https://www.geogebra.org/m/n8kCSKEX  For $x = 2\sqrt{3} = 3,46m$ the window will have the maximum area of $A_{max} = 8\sqrt{3} = 13,86m^2$ Back Next! End
11. Ученикот од добиениот резултат може многу лесно да ги согледа димензиите кои прозорецот треба да ги има.	This means that, in order to build the window, the bricklayer will have to do a break in the outer wall 2 m high and about 2,5 m far from the lateral walls. Back Next!

Работен лист за учениците

1. Запиши ја равенката на квадратна функција?
2. Што е парабола?
3. Која е равенката на парабола со оска паралелна на у оската?
4. Како го одредувате фокусот, темето и директрисата на парабола со оска паралелна со у оската?
5. Како ја одредувате равенката на параболата со оска паралелна со у оската знаејќи ги темето и директрисата?
6. Пресметајте го изводот на следната функција: $y = x^4 - 5x^2 + 3$
7. Пресметајте го локалниот максимум и локалниот минимум на следнава функција $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$
8. Производител на тениски топчиња има дневен трошок од $C(x) = 200 - 10x + 0.01x^2$ каде што C (x) е вкупната цена во евра, а x е бројот на произведените тениски топчиња. Колкав број на произведени тениски топчиња ќе го минимизира дневниот трошок?
9. Додека игра кошарка, Френк удира воздушна топка. Висината во метри што ја достигнува топката по t секунди е дадена со функцијата $h(t) = -16t^2 + 32t + 8$. Колку време ќе биде потребно топката да ја погоди земјата? Која е максималната висина што ја достигнува топката?
10. Периметарот на еден правоаголник е 120 см. Која е максималната можна плоштина на таков правоаголник?

ПРЕДЛОГ - ПЛАН ЗА ИЗВЕДБА НА ЧАС ВО ОБЛАСТА НА ФУНКЦИИ И НИВНА ПРИМЕНА

ПРОБЛЕМ: „Веранда“

ЦЕЛНА ГРУПА: 17-годишни ученици

ПРЕТХОДНИ УСЛОВИ (знаење и способности потребни за справување со разбирањето на проблемите):

- Што е равенка?
- Да можат да решаваат равенки од втор степен.
- Што се апциса и ординатa?
- Да можат да ја пресметаат површината на многуаголник.

НАСТАВНИ ЦЕЛИ:

- да трансформира текстуален проблем во математички проблем;
- да применува калкулус во реални животни ситуации.

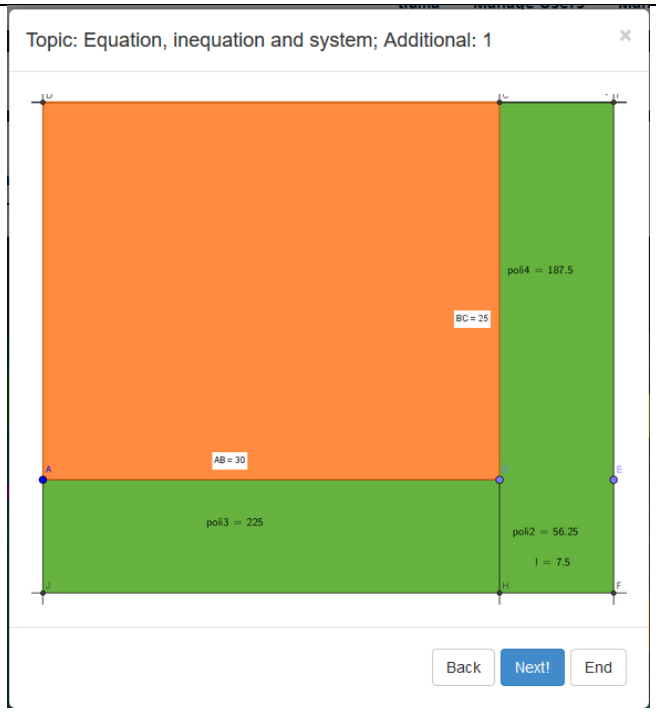
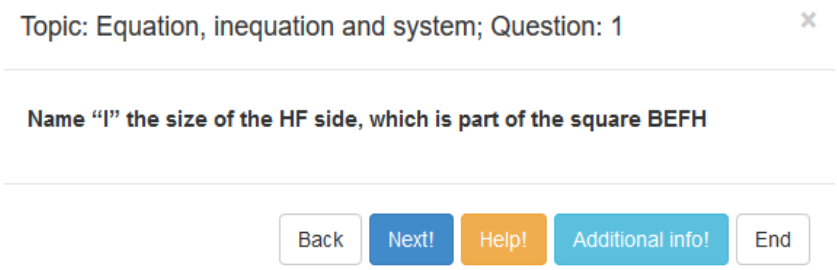
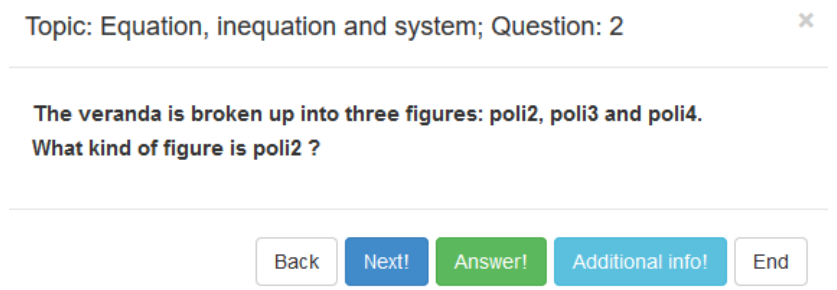
АЛАТКИ И МАТЕРИЈАЛИ:

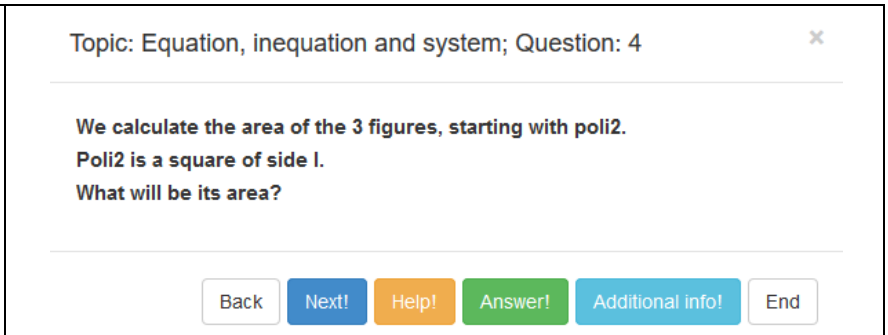
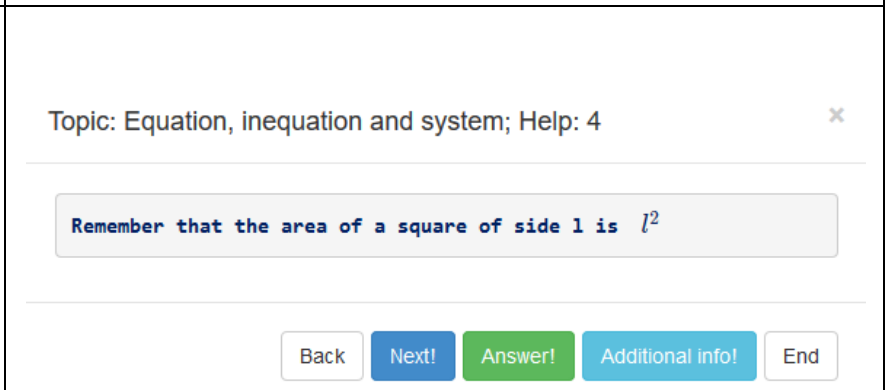
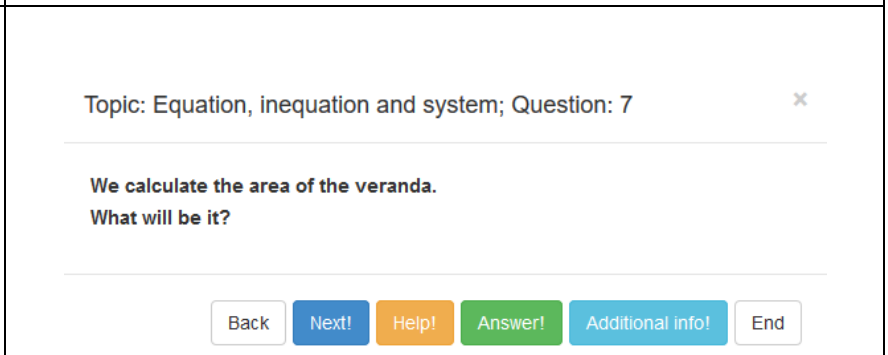
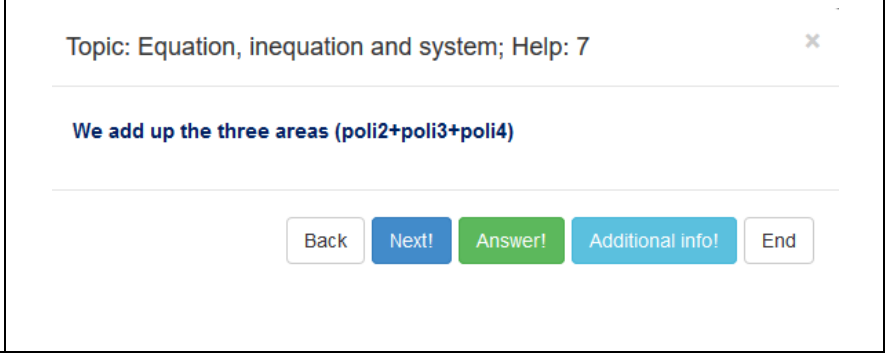
- Интерактивна книга;
- Прирачник за методот Математички лавиринт;
- Геогебра апликација;
- Цртежи.

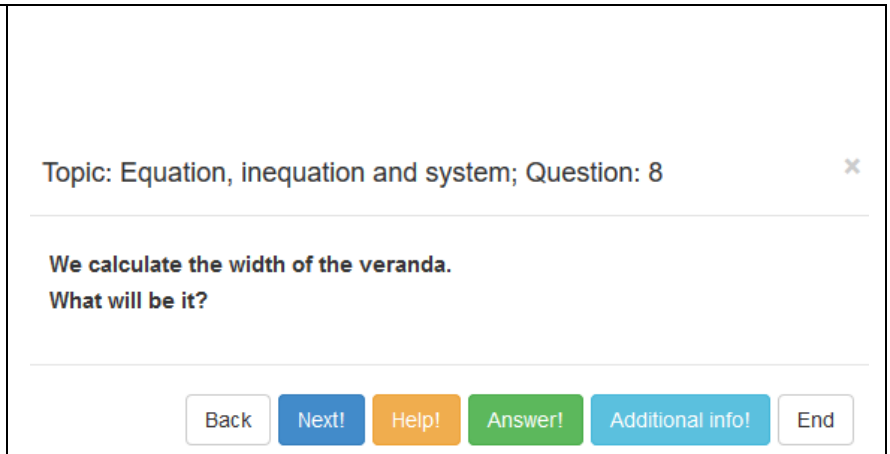
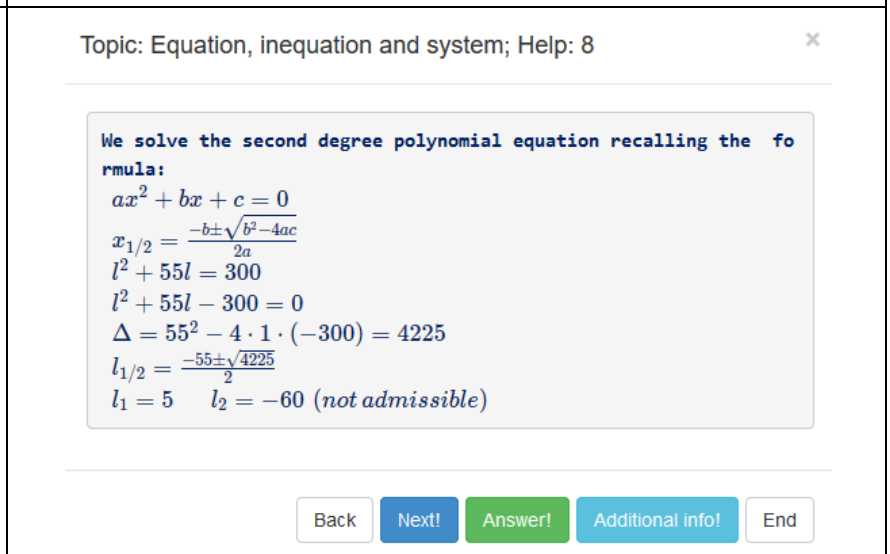
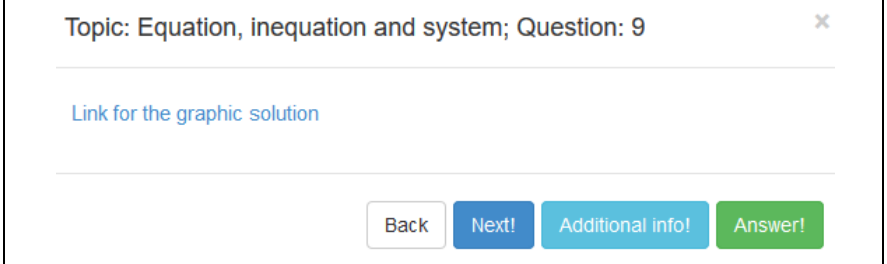
ПРОБЛЕМ:

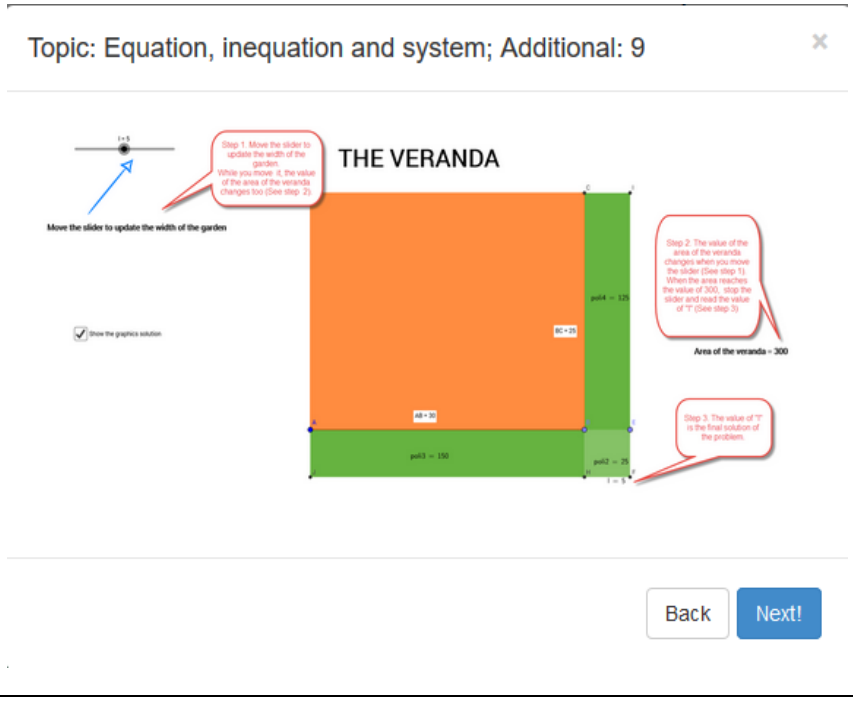
Мара сака да изгради веранда долж јужната и источната страна на нејзината куќа на плажа. Ако Мара има добиено градежен материјал за покривање на површина од 300 m^2, колку треба да биде широка верандата?

НАСТАВЕН ЧАС

1. Побарајте од учениците да направат скица за проблемот, така што тие ќе можат да го визуелизираат и да го разберат проблемот.	
2. Ученикот се насочува да го најде алгебарското решение на проблемот поставувајќи непозната „l“ за на тој начин да ја постави задачата.	
3. Ученикот треба да размисли за видот на геометриските фигури што ќе се добијат кога ќе ја разложиме верандата....	

4. …и да се пресмета површината на секоја од добиените фигури.	
5. ПОМОШ: Со кликање на копчето **Help**, ученикот ќе се потсети на формулата за пресметување на плоштина на квадрат.	
6. Откога ќе се пресмета плоштината на секој од трите дела, се бара од ученикот да ја пресмета плоштината на цела веранда.	
7. ПОМОШ: Со кликање на **Help**, на ученикот му се помага да ја пресмета плоштината на целата веранда.	

8. За да се пресмета ширината на верандата, потребно е да се постави и да се реши равенка од втор степен која ќе ни ја даде плоштината на верандата со позната вредност (300).	
9. ПОМОШ: Копчето **Help** го дава решението на равенката. На тој начин ученикот ќе може да се потсети на формулата за решавање на равенки од втор степен.	
10. Исто така може да се добие графичко решение на проблемот. Со кликање на линкот се отвора работен лист во Геогебра со поставен проблем....	

11...ученикот треба само да го поместува придвижувачот за да го најде графичкото решение.	

Работен лист за учениците

1. Како се пресметува плоштина на правоаголник и плоштина на квадрат?

2. Која е формулата за пресметување на дискриминанта на равенка од втор степен?

3. Која е формулата која дава решенија за равенка од втор степен?

4. Решете ја следната равенка од втор степен: $16x^2 - 8x + 1 = 0$.

5. Решете ја следната равенка од втор степен: $x^2 + x + 1 = 0$.

6. Два автомобили тргнуваат од иста точка. Еден автомобил започнува да вози кон север со брзина од 25 км / ч. Два часа подоцна, вториот автомобил започнува да вози кон исток со брзина од 20 км / ч. После колку време од тргнување на првиот автомобил двата автомобили ќе бидат на растојание од 300 километри?

7. Во една канцеларијата има две машини за полнење коверти. Работејќи заедно, тие можат да наполнат еден пакет со коверти за 2 часа. Работејќи одделно, на втората машина ѝ е потребен 1 час повеќе од првата машина да наполни еден пакет со коверти. Колку долго ќе биде потребно секоја од машините да полни по еден пакет со коверти?

ПРЕДЛОГ - ПЛАН ЗА ИЗВЕДБА НА ЧАС ВО ОБЛАСТА НА КВАДРАТНИ ФУНКЦИИ

ПРОБЛЕМ: Прозорец на поткровје

ЦЕЛНА ГРУПА: 16-годишни ученици

ПРЕТХОДНИ УСЛОВИ (знаење и способности потребни за справување со разбирање на проблемите):

- Што е правоаголен рамнокрак триаголник ?
- Да ја знае формулата за плоштина на правоаголник.
- Што е квадратна функција?
- Што е парабола?
- Кога квадратна функција има максимум?
- Да може да решава симултани равенки.

НАСТАВНИ ЦЕЛИ:

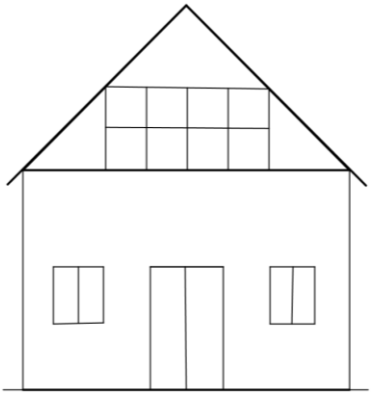
- да претвори текстуалниот проблем во математички;
- да го пресмета максимумот на квадратна функција;
- да примени максимум на квадратна функција во реален живот.

АЛАТКИ И МАТЕРИЈАЛИ:

- Интерактивна книга;
- Прирачник за методот Математички лавиринт;
- Примена на Геогебра;
- Цртежи.

ПРОБЛЕМ:

На предниот дел на кров со форма на правоаголен рамнокрак триаголник, треба да отвориме правоаголен прозорец, како што е прикажано на сликата. Должината на хипотенузата е 8 метри. Која треба да биде

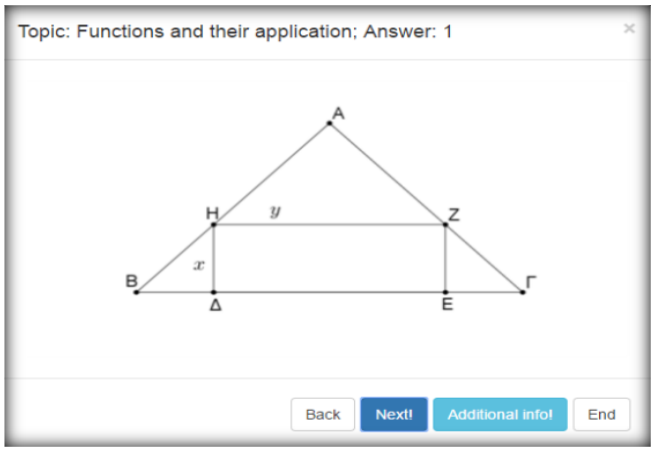


висината и ширината на прозорецот, за да може во поткровјето да влегува максимална светлина.

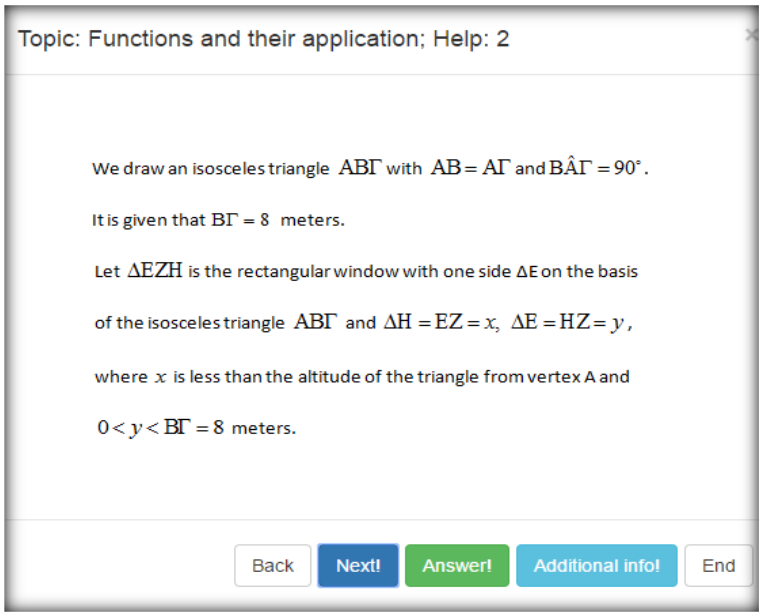
(Дадено е дека светлината што влегува ќе биде максимум кога површината на прозорецот ќе биде максимум)

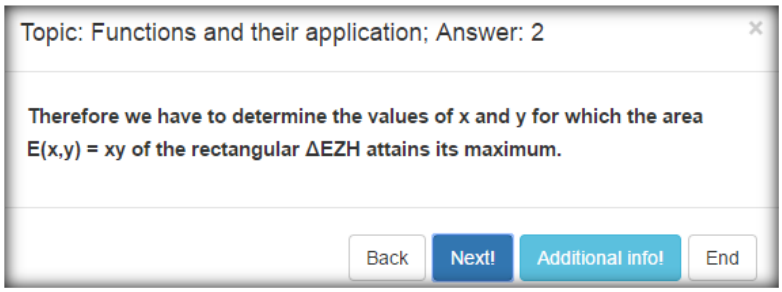
НАСТАВЕН ЧАС

1. Бараме од учениците да направат цртеж/скица поврзана со проблемот, за да може да визуелизираат и да разберат за што се работи во задачата.



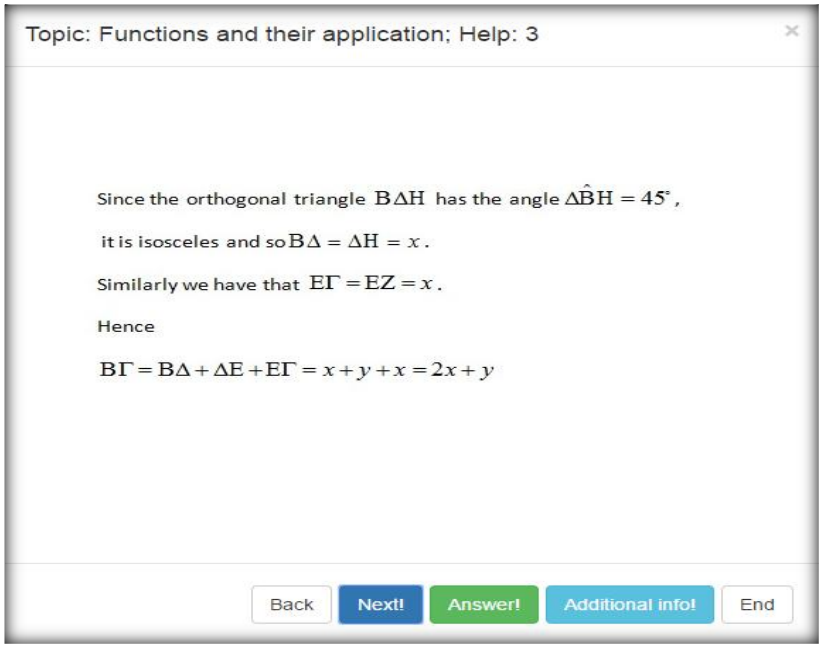
2. Учениците треба да го постават проблемот. Тие треба да го претворат текстуалниот проблем во задача со математички симболи. За да го направат тоа, тие треба да се потсетат за правоаголен рамнокрак триаголник и за формулата за плоштина на триаголник.





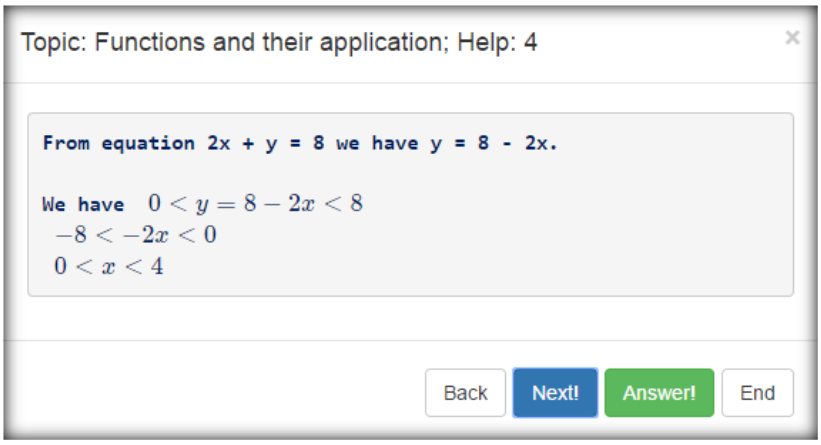
3. Во задачата се дадени некои услови, затоа од ученикот се бара да ги примени истите при решавањето на проблемот.

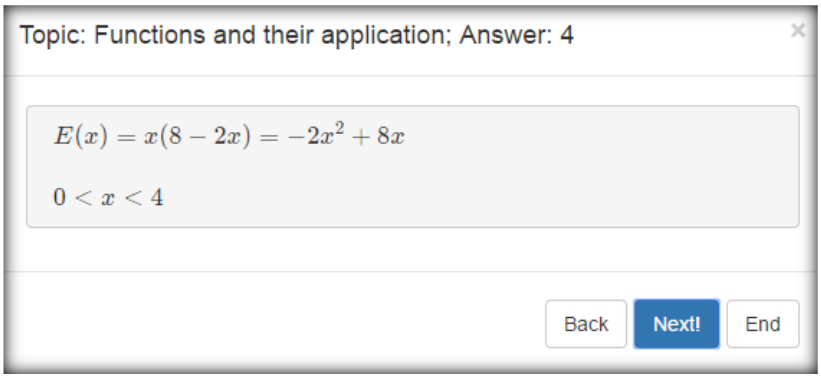
   Кој е соодносот на x и y?



   Користејќи ја скицата и претходното знаење за правоаголен рамнокрак триаголник, ученикот доаѓа до заклучок дека врската помеѓу x и y е $2x+y=8$.

4. За да продолжи со работа, ученикот треба да ја претстави плоштината на правоаголникот како функција со една непозната. Тој треба да користи метод на замена и да реши едноставни неравенки.

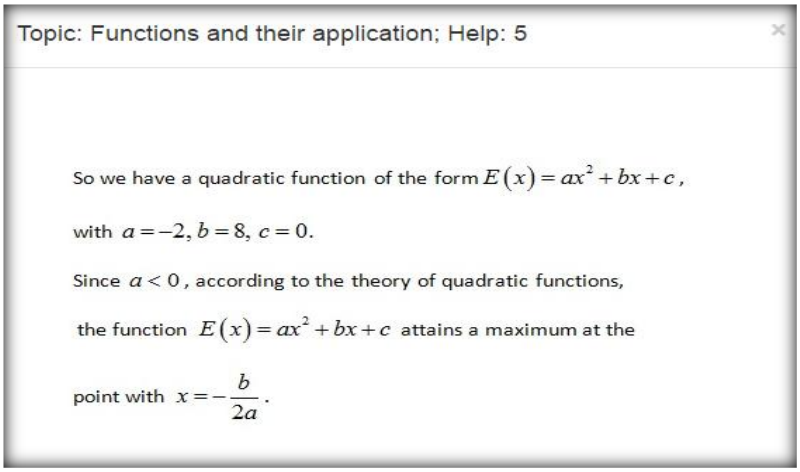


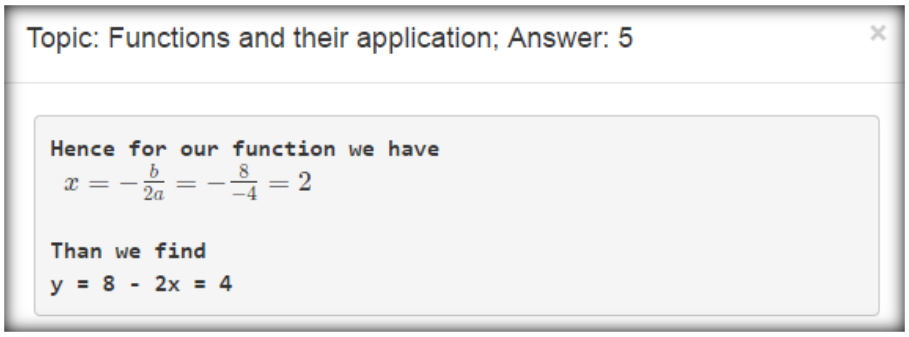


5. Следејќи ги претходните чекори, ученикот доаѓа до заклучок дека плоштината на правоаголник е квадратна функција. На почетокот на решавањето на овој проблем, ученикот утврдува дека е потребна вредноста за висината и ширината на правоаголник со максимална плоштина.

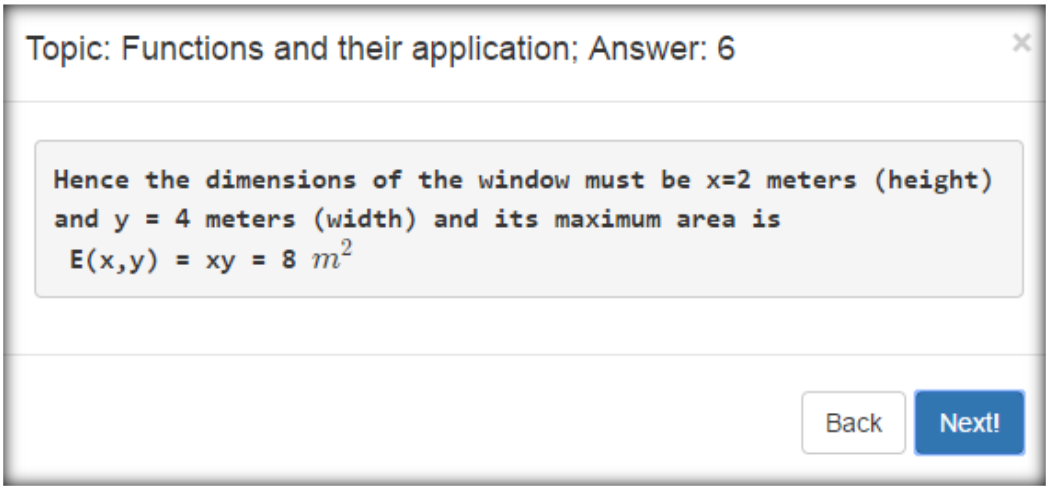
   Сега, ученикот треба да најде каде функцијата E(x) има максимум?

   Учениците ќе се потсетат за тоа што еквадратна функција и кога квадратната функција има максимум.





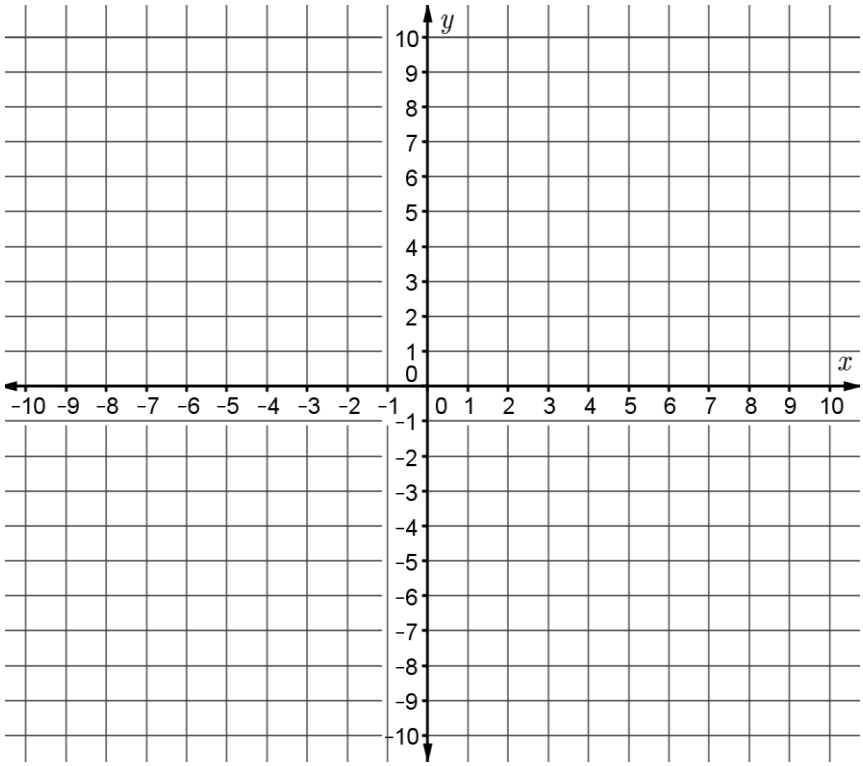
6. Во оваа задача учениците го користат максимумот на квадратната функција во реален проблем. На прашањето: Која треба да биде висината и ширината на прозорецот, за во поткровјето да влегува најмногу светлина, одговорот е:



РАБОТЕН ЛИСТ ЗА УЧЕНИЦИ

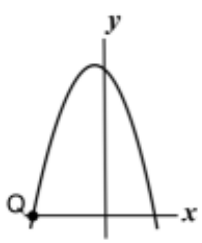
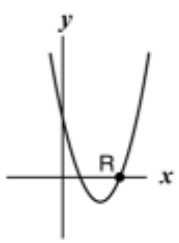
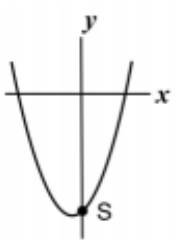
1. Која е равенката на квадратна функција?

2. Нацртај график на функција $f(x) = x^2 + 2x - 3$.



3. Дали функцијата има минимум? Доколку има, каде е?
4. Дали функцијата има максимум? Доколку има, каде е?
5. На сликата има 4 равенки на квадратни функции и 4 скици на графици на квадратни функции:

A. $y = x^2 - 6x + 8$	B. $y = (x-6)(x+8)$	C. $y = (x-6)^2 + 8$	D. $y = -(x+8)(x-6)$

1.	2.	3.	4.
			

a) Поврзи ги равенките со соодветните графици и објасни.

Равенката A соодветствува на график _____ затоа што

_____

Равенката B соодветствува на график _____ затоа што

_____

Равенката C соодветствува на график _____ затоа што

_____

Равенката D соодветствува на график _____ затоа што

_____

b) Напиши ги координатите на точките P(,) Q(,) R(,) S(,).

6. График на квадратна функција има пресек со y -оската во (0,5) и минимум во (3, -4).

a) Напиши ја равенката на нејзината крива

_____

b) Напиши ги координатите на коренот/ите на квадратната функција

_____

7. Јосиф фрлил бејзбол-топче од прозорец кој е четири метри висок. Позицијата на топчето во Правоаголен координатен систем Oxy е одредена со парабола $y = -x^2 + 4$. На колку метри оддалеченост од зградата во која се наоѓа Јосиф, топчето ќе падне на земја?

8. Топка паѓа од висина од 60 метри. Квадратната равенка $d = -5t^2 + 60$ ја дава оддалеченоста на топката d после t секунди. После колку секунди топката ќе падне на земја?

9. Висината во метри на проектил за t секунди може да се пресмета со функција $h(t) = -5t^2 + 40t + 1.2$ Најди ја висината на проектилот на 4 секунди од лансирањето.

ПРЕДЛОГ - ПЛАН ЗА ИЗВЕДБА НА ЧАС

ОД ОБЛАСТА НА ВЕРОЈАТНОСТ

ПРОБЛЕМ: „Средба на двајца пријатели“

ЦЕЛНА ГРУПА: ученици на возраст од 17 до 18 години

ПРЕТХОДНИ УСЛОВИ (знаење и способности потребни за справување со разбирање на проблемите):

- Што е веројатност?
- Како да се одреди веројатноста за настанот А?
- Колкав е бројот на елементарните настани Ω и бројот на поволните резултати од настанот А?
- Да можат да решаваат неравенки.

НАСТАВНИ ЦЕЛИ:

Ученикот ќе може:

- да го претвори текстуалниот проблем во математички проблем;
- да постави стратегија за решавање на проблемот;
- да ја пресмета веројатноста за настанот А;
- да ја одреди веројатноста за настанот А, користејќи ја геометриската веројатност;
- да ја користи веројатноста во реалниот живот;
- да ја поврзе веројатноста со реалниот свет;
- да развива вештини за решавање на проблеми.

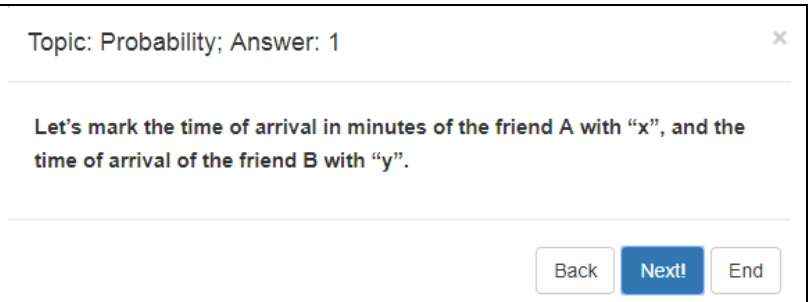
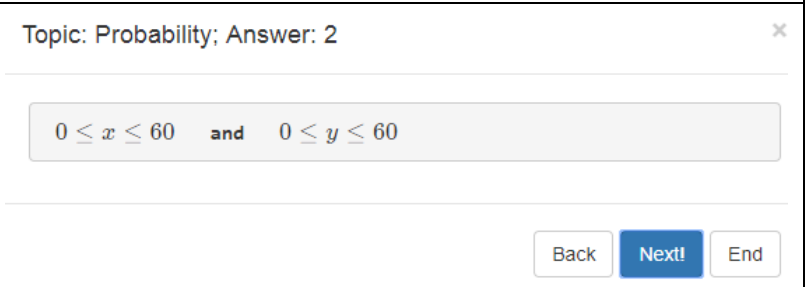
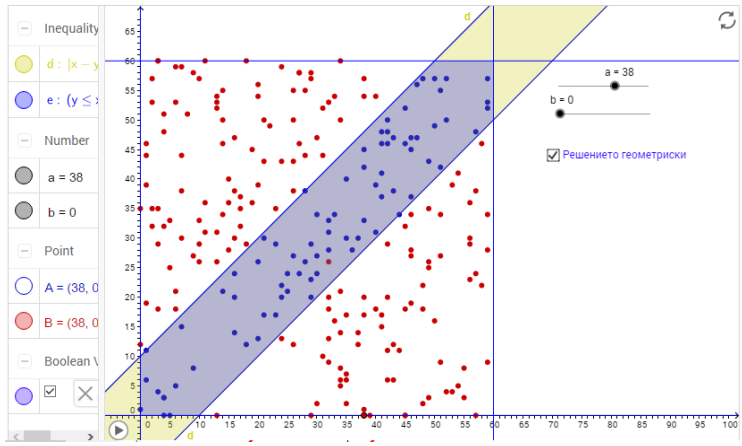
АЛАТКИ И МАТЕРИЈАЛИ:

- Интерактивна книга;
- Прирачник за методот Математички лавиринт;
- Примена на Геогебра;
- Цртежи.

ПРОБЛЕМ:

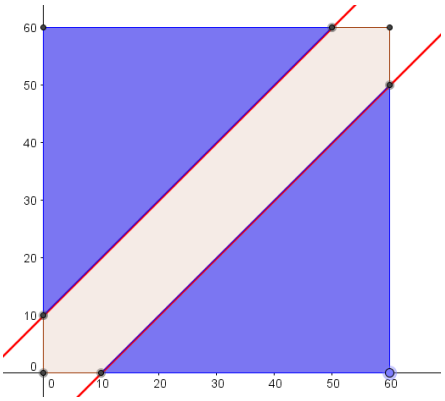
Двајца пријатели A и B се договориле да се сретнат во центарот на Скопје од 12 до 1 часот попладне. Одреди ја веројатноста дека двајцата пријатели ќе се сретнат, ако и двајцата по пристигнувањето на договореното место чекаат 10 минути да стигне другиот. Доколку пријателот не пристигне на договореното место, тие си заминуваат.

НАСТАВЕН ЧАС

1. Учениците треба да го обележат времето кога двајцата пријатели ќе пристигнат на плоштадот користејќи променливи.	
2. Учениците треба да ги разберат променливите и да одговорат во кои интервали се вредностите на променливите.	
3. На учениците им се предлага да користат точка S со координати x и y. Или: *S*(*x*,*y*) да го обележат времето на пристигнување на двајцата пријатели. На учениците им се дава визуелизација на проблемот во Геогебра и насоки како тоа да го	 http://tube.geogebra.org/m/UhentK8w?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Fzoran%2Fpage%2F2

направат самостојно.	%2Fr%2F0
4. Ученикот се насочува да ја најде веројатноста на настанот А, преку користење на геометриска веројатност.	Topic: Probability; Answer: 6 $\|\Omega\|$ - the area of the figure of elementary events, $\|A\|$ - the area of the figure of favorable events, $P(A) = \frac{\|A\|}{\|\Omega\|}$ Back Next! End
5. На ученикот му се помага да го одреди множеството на елементарни настани Ω.	Topic: Probability; Answer: 7 A square with a side of 60 units. $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 60; 0 \le y \le 60; x, y \in Z\}$ Back Next! End
6. На ученикот му се дава помош за пресметување на плоштината на Ω.	Topic: Probability; Help: 8 The area of a square with a side a, $P = a^2$. Make a sketch (drawing). Back Next! Answer! Additional info! End $\|\Omega\| = 60^2 = 3600$
7. Ученикот е насочуван преку прашањата: Што е потребно за двајцата пријатели да се сретнат? Колкава е разликата во минути кога тие пристигнале на плоштадот?	Topic: Probability; Answer: 9 The difference in an absolute value has to be less than or equal to 10 minutes. $\|x - y\| \le 10$ Back Next! End

8. Учениците треба да го обележат настанот што ќе се случи. Настан А – пријателите се сретнуваат на плоштадот. Кое е множеството на поволни настани?	Topic: Probability; Answer: 11 $A = \{(x, y) \mid x, y \in Z; \lvert x - y \rvert \leq 10\}$ Back Next! End
9. Се бара од учениците да ја одредат плоштината на А преку решавање на неравенки.	Topic: Probability; Answer: 12 To determine the area of the figure obtained for the favorable events, by solving the inequality. $\lvert x - y \rvert \leq 10$. Back Next! End
10. Кои две неравенки се добиваат? Пресекот на двете решенија е плоштината на А.	Topic: Probability; Answer: 15 $y \leq x + 10$ and $y \geq x - 10$ Back Next! End
11. Учениците треба да го одредат графикот на правите линии. Треба да се најде пресекот на правите линии со страните на квадратот. Направете скица на графикот.	$y = x + 10$ (Пресек со правите линии y=60 и x=0) $y = x - 10$ (Пресек со правите линии y=0 и x=60)
12. Учениците треба да ја пресметаат плоштината на добиената фигура.	Обележете ги правите линии на графикот со црвена боја и одредете каде точката S(x,y) ќе лежи, ако двајцата пријатели се сретнат, и каде доколку не се сретнат.

	Ако точката S(x,y) лежи во плавиот дел на квадратот, тогаш двајцата пријатели нема да се сретнат. Ако точката лежи во внатрешниот дел обележан со прави линии (со црвена боја на сликата) тогаш двајцата пријатели би се сретнале. 
13. На учениците им се помага со следните прашања: Која е плоштината на А? Како да се пресмета таа? Што претставуваат двата плави триаголници?	Topic: Probability; Answer: 18 The area of A is a difference from the area of the whole square and the square made up of two isosceles right triangles with a cathetus of 50 units. $\|A\| = 60^2 - (60-10)^2 = 60^2 - 50^2$ and $\|A\| = 3600 - 2500 = 1100$ Back Next! End
14. Учениците треба да ја пресметаат веројатноста на настанот?	Topic: Probability; Answer: 19 $P(A) = \frac{\|A\|}{\|\Omega\|} = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}$ $P(A) = 0,31$ Back Next! End
15. И изразена во проценти. Заклучок.	Topic: Probability; Answer: 20 31% The probability that the both friends will meet each other is 31%. Back Next!

Геогебра-аплет

Протокол за конструкција во Геогебра

Бр.	Икона	Наредба/ Вредност
1		Slip a, from 0 to 60, step 1, check „ Accidentally “, Turn animation on
2		Slip b, from 0 to 60, step 1, check „ Accidentally “, Turn animation on
3		In the window for entry, point S=(a,b)
4		Right click on the point S and in the characteristics in the tab - Basic to turn on – trace, in the color tab to choose red, and in the tab – Advanced > Term for indication, to enter: abs(a-b)<10
5		In the window for entry, point S_1=(a,b)
6		Right click on the point S_1 and in the characteristics in the tab - Basic to turn on – trace, in the color tab to choose blue, and in the tab – Advanced > Term for indication, to enter: abs(a-b)>10
7		Points A=(0,0), B=(60,0), C=(60,60), D=(0,60)
8		Polygon ABCD
9		In the window for entry straight lines: y=x+10, y=x-10
10		Insert text: Show the solution
11		Checkbox - show / hide objects: Select the straight lines y=x+10, y=x-10.
12		Turn on the animation

РАБОТЕН ЛИСТ ЗА УЧЕНИЦИ

1. Се извлекува произволна карта од еден шпил со карти. Која е веројатноста да се извлече дама?

2. Во еден сад има 3 црвени џамлии, 7 зелени и 10 бели. Ако земеме една произволна џамлија од садот, која е веројатноста дека таа ќе биде бела?

3. Во една група од 200 луѓе, 50 од нив имаат А крвна група, 65 од нив имаат В, 70 имаат О и15 АВ крвна група. Ако случајно избереме еден човек од групата, која е веројатноста дека тој ќе има О крвна група.

4. Која е веројатноста да се добие непарен број кога ќе фрлиме една коцка со 6 страни?

5. Која е веројатноста да се добие 7 кога фрламе коцка со броеви од 1-6?

6. Која е веројатноста да ја избереме буквата „и“ од зборот математика?

7. Треба да се избере порота од 12 члена, од листа на предложени 35 мажи и 15 жени. Колкава е веројатноста во поротата да нема повеќе од една жена?

8. Во една кутија со 100 калкулатори 3 се неисправни. Ако избереме 5, која е веројатноста дека:
   a) четири се исправни, еден расипан;
   b) има најмногу два расипани;
   c) сите пет се исправни.

9. Се избира одбор од 6 члена од клуб во кој има 18 машки и 12 женски члена.
   a) Колкава е веројатноста дека ќе има најмалку една жена во одборот?
   b) Најди ја веројатноста да има три мажи и три жени во одборот.

ПРЕДЛОГ - ПЛАН ЗА ИЗВЕДБА НА ЧАС ОД ОБЛАСТА ДВИЖЕЊЕ
МОДЕЛИРАЊЕ СО ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

ПРОБЛЕМ: „Движење на возови“

ЦЕЛНА ГРУПА: ученици на возраст од 14 до 15 години

ПРЕТХОДНИ УСЛОВИ:

- Кои се компонентите во праволиниското движење?
- Кој е односот помеѓу нив?
- Со кои ситуации можеме да се сретнеме кога сообраќаат два воза?
- Што значи возило со одредена должина да помине статичен објект?

НАСТАВНИ ЦЕЛИ:

- да моделираат ситуации во движење преку равенки;
- да се пресмета резултатот според поставената ситуација.

АЛАТКИ И МАТЕРИЈАЛИ:

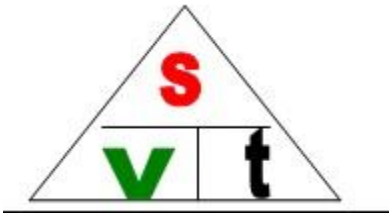
- Интерактивна книга;
- Прирачник за методот Математички лавиринт;
- Примена на Геогебра;
- Цртежи.

ПРОБЛЕМ:

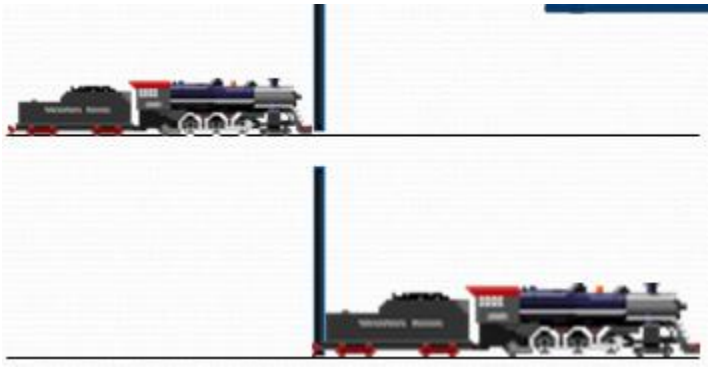
Еден воз поминува покрај столб за 6 секунди и истиот поминува преку мост долг 160 метри за 14 секунди. Друг воз има иста должина и се движи со брзина од 36 км / ч. За колку време (во секунди) тие ќе се сретнат еден со друг ако патуваат во спротивна насока?

НАСТАВЕН ЧАС:

- Да се обидеме да го разбереме текстот. Не можеме да го согледаме целиот текст одеднаш, па ќе го поделиме на делови.
- Читаме: „Возот поминува покрај столб“. Значи, проблемот се однесува на движење. Затоа треба да се потсетиме на (теоријата) главните карактеристики на движењето и основните зависности помеѓу нив.
  - T - време
  - S – растојание
  - V – брзина



1. <u>Читаме: „Возот поминува покрај столб“. Дали ситуацијата е јасна?</u>
   - Да ја илустрираме оваа ситуација и да ја анализираме. Кои размислувања и заклучоци ќе ги направиме? Да разјасниме дека тоа е една енергична, практична ситуација.
   - Да ја илустрираме ситуацијата.



   - Кога возот поминал покрај столбот? (Кога дури и последниот вагон поминал).
   - Размислете за скицата! Споредете го текстот со скицата!
   - Како практична ситуација, го разјаснивме текстот: „Возот поминал покрај столбот“, и сега возот го преминува столбот за 6 секунди.

- Имаме време кога возот го преминал столбот, кои рефлексии треба да се направат во ова време на несовпаѓање? (За 6 секунди возот го преминал столбот и со каква брзина?) Кое растојание го поминал?
- Одговори ги овие прашања! Погледнете ја скицата!

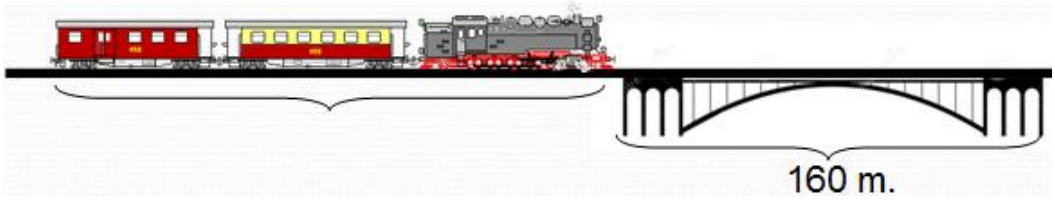
ЗАКЛУЧОЦИ:

- Поминатото растојание е еднакво на должината на возот $S = D_1$.
- Релативната брзина е еднаква на брзината на возот $V = V_1$.

Може да се судрите со слична ситуација во друг проблем. Сумирај!

- Телото со одредена должина (воз) поминува покрај статичен објект без должина (без истегнување).
- Релативната брзина е брзината на движечкиот објект.
- Поминатото растојание е должината на објектот.

2. Да го протолкуваме текстот: „над мостот ...“. Возот поминува преку мостот.
   - Споредете ги двете ситуации. Возот поминува покрај столб, а сега поминува над мостот. (Мостот има должина).
   - Да ја разјасниме оваа ситуација:



   - Кога мислиме дека возот го преминал мостот? (Возот го преминал мостот кога и последниот вагон преминал).

ЗАКЛУЧОЦИ:

- Поминатото растојание е еднакво на збирот на должината на возот и должина на мостот ($S = D_1 + M$).
- Релативната брзина е еднаква на брзината на возот $V = V_1$.

Читаме: „Возот поминал покрај столбот за 6 секунди“. Размисли! (Пауза за рефлексија). Ние читаме: „над мостот долг 160 метри - за 14 секунди“. Размисли! (Пауза за рефлексија).

Читаме: „Друг воз има иста должина и се движи со брзина од 36 км / ч“. Дали има некои нејасни ситуации во последната реченица? (Не / Да).

3. <u>За колку време (во секунди) ќе се пресретнат еден со друг ако патуваат во спротивна насока</u>?

- Да се разјасни ситуацијата напоменуваме дека: „возовите се движат во спротивна насока и се разминуваат еден со друг“!
- Да ја илустрираме ситуацијата:

- Нацртај скица!
- Кога мислиме дека возовите се разминуваат еден со друг? (Мислиме дека возовите се имаат разминато еден со друг кога и нивните последни вагони се разминале).
- Ги одредуваме зависностите помеѓу квантитативните карактеристики, релативната брзина, поминатото растојание, времето потребно за меѓусебно разминување.

ЗАКЛУЧОЦИ:

- Поминатото растојание е еднакво на збирот на должината на првиот воз и на должината на вториот ($S = D_1 + D_2$).
- Релативната брзина е еднаква на збирот на брзината на првиот воз и брзината на вториот ($V = V_1 + V_2$).

Да ги сумираме трите ситуации:

1. Возот поминува статичен објект (нагласуваме дека столбот има само висина):
   а) поминатото растојание е еднакво на должината на возот (D);
   б) релативната брзина е брзината на возот.
2. Воз (движечки објект со должина) минува над мостот (објект со должина, но статичен):
   а) поминатото растојание е еднакво на збирот на должината на возот и должината на мостот (S = D1 + M);
   б) релативната брзина на движење над мостот е еднаква на брзината на возот.
3. При разминување на два предмети што се движат и имаат одредена должина и брзина:
   а) поминатото растојание е еднакво на збирот на должините на двата воза ($S = D_1 + D_2$);
   б) релативната брзина е еднаква на збирот на брзините на двата воза ($V = V_1 + V_2$).

Ајде да го прочитаме целиот проблем: Еден воз поминува покрај столб за 6 секунди и истиот поминува преку мост долг 160 метри за 14 sec. Друг воз има иста должина и се движи со брзина од 36 км / ч. За колку време (во секунди) тие ќе се сретнат еден со друг ако патуваат во спротивна насока?

- Дали состојбата е јасна? (Да / Не)
- Решете го проблемот.

1. Возот поминува покрај столбот

Нека должината на возот е x

D: $x > 0$ $t = 6$ s. $V = \frac{x}{6} m/s$

2. Возот поминува над мостот

$S = (160 + x)$ m $t = 14$ s => $V = \frac{160+x}{14} m/s$

3. Напишете равенка кристејќи ги заклучоците за брзина во првата и во втората ситуација!

$$\frac{x}{6} = \frac{160+x}{14} \Big| \cdot 42,\ D: x > 0$$

$$7x = 3(160 + x)$$

$$7x = 480 + 3x$$

$$7x - 3x = 480$$

$$4x = 480 \mid :4$$

$$x = 120 \in D$$

$$V = \frac{120}{6} = 20 m/s$$

Одговор: Должината на возот е 120m; Брзината на возот е 20 m/s.

прв воз	**втор воз**
$V_1 = 20$m/s	$V_2 = 36$km/h = 10 m/s
$D_1 = 120$m	$D_2 = 120$m
Релативна брзина: $V = V_1 + V_2$	$V = 20$m/s + 10m/s = 30m/s

Поминато разстојание пред да се разминат :

$S = D_1 + D_2$ $S = 120 + 120 = 240$m

Потребно време да се сретнат: $t = \frac{S}{V} = \frac{240}{30} = 8s$

Одговор: времето (во секунди) што е потребно за да се разминат еден со друг е 8 секунди.

Ајде да го опишеме пристапот кон проблемот!

- Ние ја разгледуваме состојбата на секоја ситуација поединечно:

1. Возот поминува покрај столб.
2. Возот поминува над мостот.
3. Возот се разминува со друг воз.

- Каков е пристапот кон секоја од овие ситуации?

1. Ние ја илустрираме ситуацијата.
2. Ги делиме нејзините квантитативни карактеристики - растојание, брзина, време.
3. Ја нагласуваме брзината на движењето и поминатото растојание.

ЗАКЛУЧОК:

Со цел да се реши практичен проблем, ние прво мораме да ја разбереме состојбата детално. На почеток ни се чини дека не разбираме ништо, па мораме да ја читаме во делови за да ја сфатиме секоја завршена мисла од текстот. Ако не сме се сретнале со таква ситуација, ќе се обидеме да го замислиме текстот одделно, за да го разјасниме за себе.

Многу е важно откако практично сме ја разјасниле ситуацијата поставена од текстот, да ги утврдиме главните зависности помеѓу карактеристиките во ситуацијата.

РАБОТЕН ЛИСТ ЗА УЧЕНИЦИ

1. Два автомобили се оддалечени 500 километри и се движат директно еден кон друг. Еден од автомобилите се движи со брзина од 100 км/ч, а другиот се движи со брзина од 70 км/ч. Под претпоставка дека автомобилите тргнуваат во исто време, колку време е потребно двата автомобила да се сретнат?

2. Два чамци тргнуваат на оддалеченост од 100 километри и се движат надесно во исто време. Чамецот од лево се движи со двојно поголема брзина од чамецот десно. Пет часа по тргнувањето чамецот од левата страна го стигнува чамецот од десната страна. Колку брзо се движел секој чамец?

3. Два авиона полетуваат од иста точка во 8 часот. Авионот А лета на исток со брзина од 600 км/ч, а авионот Б лета на запад со брзина 450 км/ч. После колку време тие ќе бидат оддалечени на растојание од 1400 километри? За колку време ќе бидат разделени на 1400 километри? Колку далеку стигнал секој од авионите?

4. Во мирна вода, чамецот на Петар оди 4 пати побрзо од течението на реката. Патува 15 километри нагоре по реката и се враќа за 4 часа. Најдете ја брзината на течението на реката.

5. Кошула се продава за 15,00 евра, а истата е намалена за 35%. За колку евра се продавала кошулата пред попустот?

6. Во една канцеларија има две машини за пакување на плика. Машината А може да спакува еден пакет плика за 5 часа, додека машината Б може да спакува еден пакет за 3 часа. Колку часа ќе им бидат потребни на двете машини заедно да спакуваат еден пакет плика?

7. Марија може да го исчисти комплексот од канцеларии за 5 часа. Работејќи со Јован заедно, можат да го исчистат истиот комплекс за 3,5 часа. Колку време му е потребно на Јован да го исчисти комплексот сам?

ПРЕДЛОГ- ПЛАН ЗА РАБОТА НА ЧАС
РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМ ОД ВТОР СТЕПЕН СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

ПРОБЛЕМ: „Лимен покрив“

ЦЕЛНА ГРУПА: 16-годишни ученици

ПРЕДУСЛОВИ:

- Што значи квадратна функција?
- Што значи хипербола?
- Како се решава систем од втор степен со две непознати?
- Што знаеме за Виетовите формули?

НАСТАВНИ ЦЕЛИ:

- да се решаваат практични ситуации со систем од втор степен со две непознати;
- да се употребат формулите на Виета, Питагорината теорема, график на функција;
- да се илустрира графичко решение;
- да се разгледаат повеќе пристапи на решавање на проблемот.

АЛАТКИ И МАТЕРИЈАЛИ:

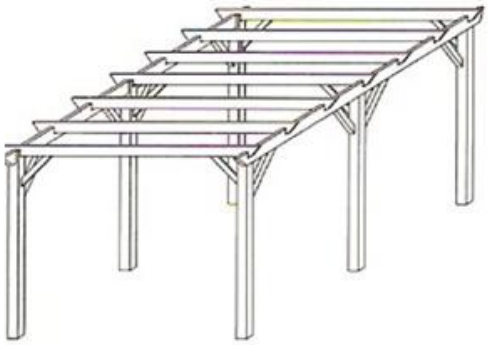
- Интерактивната книга;
- Прирачник Математички лавиринт;
- Геогебра аплети;
- Цртежи.

ПРОБЛЕМ:

За да се направи покрив на стреа, треба да се исече метален лим во облик на правоаголник со плоштина од 12 m^2 и 5 m дијагонала. Најдете ги страните на металниот лим.

НАСТАВЕН ЧАС:

Да се илустрира ситуацијата!



Формата на металниот лим е правоаголник. Ги бараме неговите димензии, страните a и b. Да ја примениме формулата за плоштина на правоаголник:

$$S = a \cdot b$$

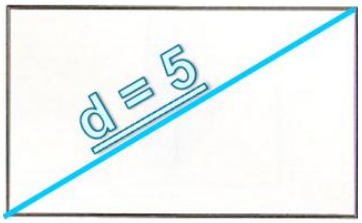
Штом ќе ги побараме должината и ширината на металниот лим, имаме две непознати: x –должината и y - ширината.

I начин: Мораме да создадеме две равенки со овие величини и да ги решаваме како систем. Какви врски можеме да видиме помеѓу овие две величини?

1. Од условите на проблемот, плоштината на металниот лим е $12\,m^2$, следствено xy = 12 ќе биде една од двете равенки.
2. Дали гледате друга зависност помеѓу x и y?
3. Тоа се катетите на правоаголниот триаголник Δ ABC чија хипотенуза е 5 m.
4. Да се потсетиме на Питагорова теорема: $c^2 = a^2 + b^2$. Следствено $5^2 = x^2 + y^2$.

   Ја добивме втората равенка во системот.

   Поставете ги сите познати вредности!



- Бидејќи x и y се страни на правоаголникот, мора да се позитивни броеви,т.е. D: x > 0, y > 0.

3. Да се создаде систем и да се реши!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

На колку начини може да се реши системот?

- Со замена и додавање.

Да го решиме системот со замена:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 3 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = -3 \end{cases}; \begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 4 \end{cases}; \begin{cases} x_4 = -3 \\ y_4 = -4 \end{cases}$$

ЗАКЛУЧОЦИ: Решенијата (-4, -3) и (-3, -4) се неприфатливи вредностии затоа не се решение на проблемот, т.е. металниот лим мора да има димензии од 4m и 3m.

Да го решиме системот со додавање:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x \cdot y = 12 \,/\cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2xy = 24 \end{cases} (+)$$

$$(x+y)^2 = 49$$

↙↘

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x\cdot y=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-7 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_3=-4 \\ y_3=-3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_4=-3 \\ y_4=-4 \end{cases}$$

ЗАКЛУЧОЦИ: Решенијата (-4, -3) и (-3, -4) се неприфатливи вредностии затоа не се решение на проблемот, т.е. металниот лим мора да има димензии од 4m и 3m.

II начин: Можете ли да го решите проблемот на друг начин?

Да го искористиме нашето знаење за теоремите на Виета.

Која формула за скратено множење може да се употреби во проблемот?

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

Виетови формули
Ако x_1 и x_2 се корени на $x^2+px+q=0$ значи $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$
Ако x_1 и x_2 се корени на $ax^2+bx+c=0$ значи $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5^2 \\ x\cdot y=12 \end{cases} \quad x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \quad \Rightarrow \quad (x+y)^2-24=25 \Rightarrow (x+y)^2=49$$

$$\Rightarrow x+y=7 \vee x+y=-7$$

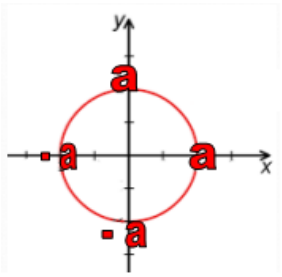
$$\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$$ x и y се решенија на $p^2-7p+12=0 \quad \Rightarrow \quad p_1=4, p_2=3$

$$\begin{cases} x+y=-7 \\ xy=12 \end{cases}$$ x и y се решенија на $q^2+7q+12=0 \quad \Rightarrow q_1=-4, q_2=-3$

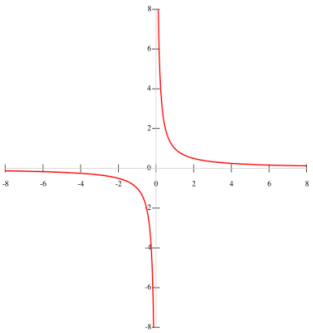
Решенијата се: (4,3), (-4,-3), (3,4), (-3,-4)

ЗАКЛУЧОЦИ: Решенијата x + y = -7 се неприфатливи вредности (D: x > 0, y > 0) и затоа не се решение на проблемот, т.е. металниот лим мора да има димензии од 4m и 3m.

III начин: Да се потсетиме што знаеме за график на функција и да видиме дали проблемот може да се реши графички.



- Кој е графикот на равенката $x^2 + y^2 = a^2$?
- Круг со радиус а.
- Нацртај го!

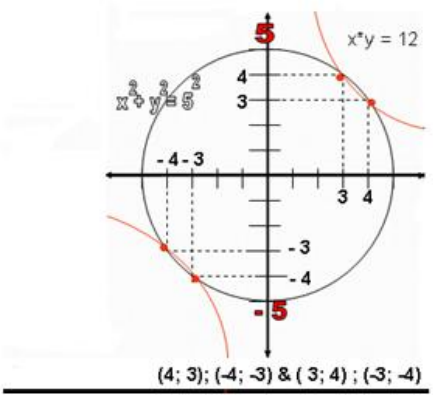


- Кој е графикот на равенката $x \cdot y = a$?
- Хипербола во I и III квадрант.
- Нацртај ја!

Да сумираме и заклучиме!

ЗАКЛУЧОЦИ:

- Бараме можно решение на двете равенки. Следствено на ова, тоа се точките каде двата графика се сечат.
- Нацртај!



Заклучок: Решенија на проблемите се 4 и 3 бидејќи негативните вредности не се решенија (D: x > 0, y > 0) (D: x > 0 , y > 0).

Одговор**:** Металниот лим мора да има димензии од 4m и 3m.

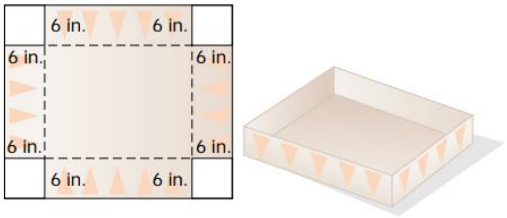
Заклучок:

Со цел да се реши практичен проблем, прво мораме де ги разбереме условите во детали. Ако не сме се сретнале со таква ситуација дотогаш, ќе се обидеме да ја замислиме и разјасниме. Мораме да одлучиме како ќе пристапиме и како ќе ја решиме (кој метод ќе го примениме).

Многу е важно, откако практично ќе ја разјасниме ситуацијата поставена во текстот, да ги одредиме основните врски помеѓу величините во ситуацијата.

РАБОТЕН ЛИСТ ЗА УЧЕНИЦИ

1. Реши го системот $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ 16x^2+y^2=25 \end{cases}$
2. Еден инженер треба да дизајнира компјутерски екран со 19 инча во дијагонала и плоштина од 175 квадратни инча. Најди ги димензиите на екранот со точност од една децимала.
3. Најди два реални броја чиј збир е 3, а збирот на нивните квадрати е 5.
4. Најди ги димензиите на правоаголник со плоштина 32 m^2 и периметар од 36 m.
5. Една правоаголна кутија без капак се добива со отсекување на квадрат со страна од 6 инча од сите четири агли од еден правоаголен картон и свиткување на краевите и страните. Плоштината на картонот пред отсекувањето на аглите била 768 квадратни инчи, а волуменот на кутијата е 1.440 кубни инчи. Најдете ги димензиите на првичното парче картон.



РАБОТЕН ЛИСТ ЗА УЧЕНИЦИ

1. За патронатот на училиштето се организирала трка на 1000 m. Училиштето обезбедило награди за сите учесници во вид на спортска опрема. Вкупната сума потрошена за наградите како спортска опрема е 5000 евра. Ученикот кој победил на трката можел да одбере опрема за 800 евра, додека секој што стигнал после него добил награда за 50 евра поевтина од претходниот натпреварувач. Колку ученици учествувале во трката?
2. Дедото му дал на внукот една кофа и го замолил да донесе 8 литра вода од бунарот. Кофата е длабока 24 cm, а дијаметрите се 16 cm на долниот и 24 cm на горниот дел. Може ли внукот да го донесе бараното количество вода само со едно одење до бунарот?
3. Во менито на еден ресторан се нуди салата од домати, краставици и сирење. Порцијата е 750 g. Ресторанот ги купува доматите по цена од 3 евра за kg, краставиците – 2 евра за kg и сирењето – 7 евра за kg. Колку грама сирење има во една порција салата ако има 250 g краставици, а целата порција ресторанот го чини 2,40 евра?
4. Петар добива од својата баба 4 евра два пати седмично и со тие пари си купува сок и чоколада. Чоколадата чини $\frac{3}{5}$ од парите, а остатокот Петар го троши на сок. Но, цената на чоколадата во продавницата се зголемила за 12%, а сокот добил намалување од 15%. Може ли сега Петар да си купи чоколада и сок за 4 евра два пати седмично?
5. Марија и нејзиниот брат имаат заедничка соба. Таа ја чисти собата за 10 минути, а тој за 25 минути. Колку време ќе им треба да ја исчистат собата ако работат заедно?
6. Една цилиндрична чаша има радиус на основата еднаков на 25% од висината на чашата. До која висина можеме да ја наполниме чашата со сок, така што кога ќе ставиме една топка сладолед со радиус како радиусот на основата на чашата, сокот да не прелее од чашата?

ЕВАЛУАЦИЈА

Евалуацијата е процес со кој критички се проверува една програма. Тој вклучува собирање и анализа на информации за активностите, карактеристиките и резултатите од програмата. Неговата цел е да ја процени програмата, да ја подобри ефективноста и/или да ги соопшти одлуките од програмата (Патон, 1987).

Проектот Математички лавиринт се однесува на создавање на веб платформа со интерактивна книга која содржи математички проблеми од реалниот живот. Основната намера и цел на проектот е да се подигне знаењето на учениците преку здобивање вештини и компетенции во математиката. Со цел да се процени до кој степен се постигнати нашите цели, подготвени и спреведени се неколку формулари кои може да се употребат како пример за оценување и евалуација.

Важно беше да се оценат активностите со цел истите да бидат што е можно поефикасни. Евалуацијата ни помогна да се идентификуваат областите за подобрување и ни помогна да ги разбереме целите поефикасно. Понатаму, кога ги споделивме нашите резултати за она што беше повеќе или помалку ефикасно, помогнавме да се унапреди образованието во опкружувањето.

Евалуацијата потпаѓа во две поширoки категории: формативна и сумативна. Формативните евалуации се изведуваат за време на развојот и имплементацијата на програмата и се корисни ако сакате насоки за тоа како најдобро да ја постигнете вашата цел или да ја подобрите програмата. Сумативните евалуации би требало да се направат тогаш кога вашите програми се оформени и ќе ви покажат до кој степен тие ја постигнуваат целта.

Во самите категории на формативна и сумативна, има различни видови на евалуација.

ВИД НА ЕВАЛУАЦИЈА	ЦЕЛ
Формативна	
1. Проценка на потребата	Одредува кому му е потребна програмата, колкава е потребата, и што може да се стори да се задоволи потребата. Проценката за потреба може да помогне во одредувањето која публика не е во моментот опслужена со програми и да обезбеди увид во тоа какви карактеристики треба да ги имаат новите програми за да ги задоволат потребите на јавноста.
2. Евалуација на процес или имплементација	Го испитува процесот на имплементација на програмата и одредува дали тој функционира како што е планирано. Може да се изведе еднаш или постојано. Резултатите се користат за подобрување на програмата. Евалуацијата на програмата може да се фокусира на бројот и типот на инволвирани учесници и/или да одреди колку тие се задоволни од неа.
Сумативна	
1. Проценка на производот	Истражува до кој степен програмата ги постигнува своите цели (производи). Овие производи се краткорочни и среднорочни промени во учесниците во програмата што резултира директно од програмата. На пример, проценките на производот може да ги испитаат подобрувањата на знаењето, вештините, ставовите, намерите или однесувањето на учесниците.
2. Проценка на влијанието	Одредува какви било поширок, долгорочни промени кои се појавиле како резултат од програмата. Овие влијанија се мрежни ефекти, типични за цело училиште, заедница, организација, општество, опкружување или влијанија на човековото здравје на програмите.

Преземено и адаптирано од MEERA

За време на процесот на евалуација се придржуваме до следниве принципи и стандарди кои го прават релевантен и прикладен за понатамошна употреба од наставници и други непристрасни лица.

- **Добрата евалуација е изработена за вашата програма и надградува знаење и ресурси на постоечката проценка.**

Проценката треба да биде изведена да се однесува на одредени цели од програмата. Сепак, можно е некои други едукатори да изработиле и тестирале сличен дизајн и алатки за евалуација. Наместо да почнуваме од почеток, увидот во она што другите го направиле може да ни помогне да спроведеме подобра евалуација.

- **Добрата евалуација е инклузивна.**

Овозможува земање во предвид различни гледишта и овозможува резултатите да се што е можно покомплетни и непристрасни. Треба да се побара придонес од сите засегнати и инволвирани од проценката, како ученици, наставници, програмски персонал или членови на заедницата. Еден од начините да се осигурате дека евалуацијата е инклузивна е преку сладење на евалуацијата на учесниците.

- **Добрата евалуација е чесна.**

Резултатите од евалуацијата веројатно ќе покажат дека вашата програма има јаки страни како и ограничувања. Проценката не треба да биде едноставна изјава за успех или неуспех на програмата. Доказот дека програмата не ги достигнува амбициозните цели е тешко да се проголта, но може да ви помогне да научите каде да ги вложите вашите ограничени ресурси.

- **Добрата евалуација може повторно да се спроведе и методите се онолку ригорозни колку што дозволуваат околностите.**

Добра евалуација е онаа што може да биде повторно спреведена, што значи дека некој друг може да ја спроведе и да ги добие истите резултати. Колку е поголем квалитетот на дизајнот на евалуацијата, методите на собирање податоци и нивна анализа, толку поточни ќе бидат заклучоците и другите ќе имаат поголема доверба во резултатите.

МАТЕМАТИЧКИ КАМПОВИ

Во предлог проектот испланиравме и организиравме активности за проценка на ефективноста на Интерактивната книга. Во однос на ова, имаше организирано три летни математички кампови од трите средни училишта вклучени во проектот како партнери.

Математичките кампови се организираа со вкупно 90 ученици кои беа одбрани по критериуми поставени од наставници по математика. Камповите траеја по 5 дена во едукативно опкружување со договорена агенда и претходно договорени активности. Намерата беше логирање на учениците и користење на Интерактивната книга со што учениците ја користеа платформата и ја зголемија мотивацијата, вештините и компетенциите во математиката, како и подобрување на вниманието и логиката.

За спроведување на адекватна анализа на вештините и мотивацијата на учесниците, беа изведени воведен и завршен тест. Учениците требаше да решат реални животни проблеми создадени од нивните наставници во согласност со нивната возраст и наставен план. Резултатите од завршниот тест кој им беше зададен на учениците по 5-дневното користење на платформата покажаа подобрено знаење во решавањето на текстуални проблеми кои беа тешки за нив на почетокот.

Понатаму, опкружувањето каде беа одржани камповите, изборот на ученици и активностите кои се одржуваа помеѓу сесиите, покажаа зголемена мотивација и волја за учење. Анкетите кои на почетокот од проектот им беа дадени на учениците вклучуваа општи прашања поврзани со учењето математика, како и типови на задачи кои им се најтешки.

Резултатите од анкетата послужија како основа за создавање на Интерактивната книга. Имено, текстуалните проблеми се голем предизвик за учениците бидејќи треба да ги „преведат“ со математички симболи со цел да ги решат. Понатаму, кога овие проблеми имаат примена во реални ситуации, ги мотивираат учениците да употребат логика и критичко мислење за да најдат поврзаност на математиката и реалниот живот.

ФОРМУЛАРИ ЗА ЕВАЛУАЦИЈА

Во следниов дел ви ги прикажуваме користените формулари за оцена и процена на знаењата, мотивацијата и напредокот на учениците. Тестовите и формуларите можат да се користат како пример тестови и алатки за евалуација од наставници по математика во основните и средните училишта кои ќе сакаат да ја користат Интерактивната книга Математички лавиринт во училница или како дополнителни активности.

Тие се дадени по ред на изведување за време на математичките кампови:

- **Самооценување**
- **Воведен тест**
- **Ученички напредок**
- **Завршен тест**
- **Евалуација на Интерактивната книга**
- **Евалуација на математичките кампови**
- **Анализа на резултатите**

ФОРМУЛАР ЗА САМООЦЕНУВАЊЕ

Име: _____

1. Наведете ги причините за учество на математичкиот камп:

_____
_____
_____

2. Дали сакате да работите математика на училиште?

а) да b) не c) друго _____

3. Што ве мотивира повеќе?

а) Проблеми со математички симболи b)текстуални проблеми со примена во реалниот живот

4. На скала од 1-5, колку е тешко решавањето проблеми? (1 е најмалку тешко, 5 е најтешко)

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

5. Што од следново би користеле за решавање проблеми? (можете да означите повеќе од едно)

a) интернет
b) книги
c) отворени едукативни ресурси (Geogebra)
d) другари (соученици)
e) Математички лавиринт интерактивната книга
f) наставникот
g) друго _____

6. Ако наставникот ви помага при решавање проблеми, колку пати барате помош ?
a) Не ми треба помош
b) еднаш или два пати
c) три до шест пати
d) повеќе од тоа

7. Кои се вашите очекувања од овој математички камп и интерактивната книга Математички лавиринт?

_____
_____
_____

ВОВЕДЕН ТЕСТ

Решете ги проблемите:

1. Сумата од 2200 евра треба да им се подели на четири луѓе. Вториот треба да добие 500 евра повеќе од првиот, третиот треба да добие 300 евра помалку од првиот, а четвртиот треба да добие двојно повеќе од првиот. По колку пари треба да добие секој од нив?

2. Четири продавници делат профит според следниве делови: првата добива $\frac{3}{8}$, втората добива $\frac{1}{4}$, третата добива $\frac{1}{5}$, а четвртата остатокот од 140 000 евра. Колкав е вкупниот профит и колку добиле првите три продавници?

3. Базен има форма на шестоаголна призма со раб во основата од 10 m и еднаква длабочина од 1,8 m. Колку кубни метри вода се потребни за да се наполни базенот?

4. Колку милилитри вода треба да се додадат во раствор од 260 милилитри со 75% шеќер за да се добие раствор со 25% шеќер?

5. Во понеделник, сите цени во продавницата на Исла се 10% поголеми од нормалните. Во петок сите цени во продавницата на Исла се 10% помали од нормалните. Џими купил книга во понеделник по цена од 5.50 евра. Колку би чинела истата книга во петок?

6. Во 3-А класот половината од учениците се од истата општина, но надвор од градот, $\frac{1}{6}$ живеат надвор од општината а 8 живеат во истиот град. Колку ученици има во класот?

ЕВАЛУАЦИЈА НА НАПРЕДОКОТ НА УЧЕНИЦИТЕ

ЧЕК ЛИСТА ЗА ЕВАЛУАЦИЈА НА НАПРЕДОКОТ КАЈ УЧЕНИЦИТЕ

Име на ученикот: _____

	Дали е ученикот мотивиран?		Кое е нивото на знаење на ученикот			Колку помош/совети ученикот користи?			Дали ученикот користи референци при решавањето?		Дали користи отворени образовни ресурси?		Колку пати ученикот бара помош од наставникот?			Број на решени проблеми?	друго
	да	не	ниско	средно	високо	не користи	неколку	многу	да	не	ретко	често	0	1-2	3-4	повеќе		
ДЕН 1																		
ДЕН 2																		
ДЕН 3																		
ДЕН 4																		
ДЕН 5																		

Севкупен коментар од наставникот

_____

_____

_____

_____

_____

Потпис: _____

ЗАВРШЕН ТЕСТ

Решете ги проблемите:

1. Во 3-А класот половината од учениците се од истата општина, но надвор од градот, $\frac{1}{6}$ живеат надвор од општината, а 8 живеат во истиот град. Колку ученици има во класот?
2. Во понеделник, сите цени во продавницата на Исла се 15% поголеми од нормалните. Во петок сите цени во продавницата на Исла се 15% помали од нормалните. Џими купил книга во петок по цена од 5,95 евра. Колку би чинела истата книга во понеделник?
3. Колку милилитри вода треба да се додадат во раствор од 260 милилитри со 75% шеќер за да се добие раствор со 25% шеќер?
4. На почетокот од курсот по физичко воспитување, наставникот ги анкетира учениците за да одлучи што да прави. Се покажало дека $\frac{1}{4}$ од учениците сакаат да играат одбојка, $\frac{1}{5}$ ракомет, половина од учениците сакаат да вежбаат трчање а само еден да стрела. Колку ученици сакаат да играат ракомет?
5. Четири продавници делат профит според следниве делови: првата добива 37.5%, втората добива 25%, третата добива 20%, а четвртата остатокот од 140 000 евра. Колкав е вкупниот профит и колку добиле првите три продавници?
6. Базен има форма на шестоаголна призма со раб во основата од 6 m и еднаква длабочина од 1,2 m. Колку кубни метри вода се потребни за да се наполни базенот?

ЕВАЛУАЦИЈА НА ИНТЕРАКТИВНАТА КНИГА

Ве молиме означете ги следниве искази од 1 до 5 во однос на Интерактивната книга

(1 - неподобна, 2 - малку подобна, 3 - средно подобна, 4 - добро подобна и 5 - одлично подобна во имплементација на проектот)

Степен на подобност на релевантниот аспект на Интерактивната книга	Оценка
Корисна	
Атрактивна и интересна	
Ги задоволува поставените цели	
Прецизна и научно точна	
Покрива неопходен материјал	
Содржи илустрации, графикони, броеви, фотографии и др.	
Содржи прашања, вежби, поддршка, инструкции	

Ве молиме додадете дополнителен коментар во однос на Интерактивната книга:

…….
.....
……..

ЕВАЛУАЦИЈА НА МАТЕМАТИЧКИТЕ КАМПОВИ

A. Претходно искуство и обука на наставниците кои учествуваат на летните кампови

	Претходно искуство и обука за учество	ДА	НЕ	Ако ДА, означете од 0 до 5 степен на прикладност (0 - неприкладен, 5 - многу прикладен)	КОМЕНТАРИ
1	Имате ли претходно искуство во подучување на решавање проблеми?				
2	Имате ли претходна обука за пристап и прашања во однос на подучување на решавање проблеми?				
3	Имате ли претходно искуство во подучување матем. во летен камп?				
4	Дали учествувавте во активност за обука за овој летен камп?				
5	Дали имавте било каква вклученост во проектот Математички лавиринт пред летниот камп?				
6	Дали ја користевте веб страната на проектот пред летниот камп?				
7	Дали ја разгледавте интерактивната книга пред летниот камп?				
8	Дали го разгледавте Прирачник за МАТЕМАТИЧКИ лавиринтот за обука на овој проект пред учеството во летниот камп?				
9	Мислите ли дека Интерактивната книга е корисна за подучување?				
10	Дали летниот камп беше успешен за учениците за подобрување на нивните вештини во математика?				

В. Мислење на наставниците за резултатите од подучување вештини за решавање проблеми за време на летниот камп?

		ДА	НЕ	Ако ДА, означете од 0 до 5 степен на прикладност (0 - неприкладен, 5 - многу прикладен)	КОМЕНТАРИ
1	Беше ли курсот за летниот камп добро осмислен?				
2	Беше ли курсот за летниот камп добро прифатен од учениците?				
3	Дали курсот им помогна на учениците да се здобијат со вештини за разбирање на проблемот?				
4	Дали курсот им помогна на учениците да се здобијат со вештини за развивање план за решавање проблем?				
5	Дали курсот им помогна на учениците да се здобијат со вештини за имплементирање на решение за проблемот?				
6	Дали курсот им помогна на учениците да се здобијат со вештини за оценување/повторување на процесот/концептот/решенијата на проблемот ?				
7	Дали курсот им помогна на учениците да се здобијат со вештини за развивање/имплементација на различни стратегии за решавањена проблемот?				

АНАЛИЗА НА РЕЗУЛТАТИТЕ

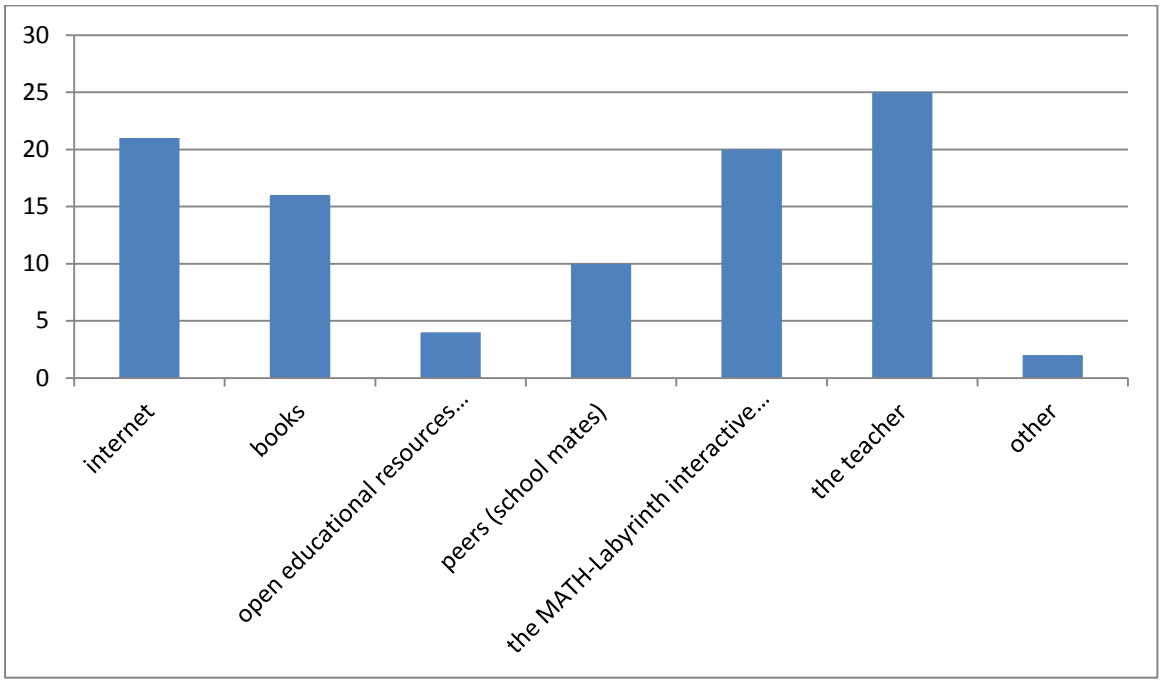
По завршувањето на летните кампови, формите и инструментите што беа користени за време на петдневните обуки беа анализирани и ги покажаа следниве резултати:

1. Учениците сакаа да научат повеќе за Интерактивната книга; да научат нови методи за решавање проблеми, да ги подобрат знаењата за математика, итн.

2. Тие се чувствуваат помотивирани за решавање текстуални проблеми отколку проблеми и задачи со симболи.

3. Учениците сметаат дека проблемските задачи се тешки во математиката

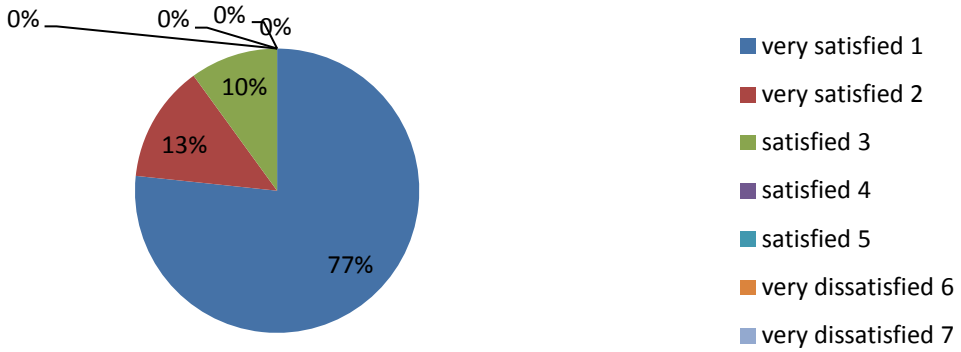
4. Кога учениците наидуваат на проблеми во решавањето на реални текстуални проблеми, тие бараат различни видови помош.



5. Учениците кои учествуваа на математичките кампови се задоволни со содржината, процесот на комуникација, локацијата и би препорачале на другари и соученици.

Ве молиме оценете го вашето севкупно задоволство од процесот на комуникација со организаторите на настанот:

Ве молиме оценете го вашето севкупно задоволство од фасилитаторите:



Врз база на вашето целосно искуство од настанот, дали би земале повторно учество или би препорачале некому?

6. Според анализата на формуларите за евалуација на напредокот на учениците, наставниците дојдоа до следниве заклучоци:

- Мотивација на учениците

Повеќето од учениците беа мотивирани за решавање на реални проблеми од Интерактивната книга секој ден за време на кампот. Некои од нив, кои имаат потешкотии со математиката, беа помалку мотивирани првиот ден, но мотивацијата се зголеми од вториот ден што се должи на интересни проблеми и составот на групата ученици.

- Број на искористени сугестии/помош

Во текот на првите два дена, послабите ученици користеа многу сугестии, а подобрите само неколку. По третиот ден, учениците значително се подобрија во смисла на разбирање на задачите и користеа помалку сугестии. Сепак, ова се забележува кај ученици со просечно/високо знаење бидејќи им требаше помалку време за разбирање и совладување на содржината. Од друга страна, на послабите ученици им е потребно подолго време да ги подобрат своите математички вештини и знаење за решавање на проблеми.

- Употреба на отворени образовни ресурси

Првично, само учениците со претходно искуство со ООР ги користеа независно и можеа да се справат со нив. Но, постепено учениците разбираа колку ООР, особено Геогебра (користена во многу примери во книгата Математички лавиринт), може да им помогне за подобро разбирање на задачите и нивна подобра визуализација. Без разлика на успехот, учениците имаат желба да користат ООР.

- Број на решени проблеми

Бројот на решени проблеми се зголемуваше секојдневно и се движеше од 2 до 6 решени проблеми на ден. По вториот ден, учениците можеа да ја користат Интерактивната книга без поголема помош од наставниците. Учениците со средно и високо знаење, можеа книгата да ја користат независно. Ова значи дека Интерактивната книга може да биде добра поддршка за независно учење и развивање вештини за решавање проблеми.

ЗАКЛУЧОК

Заедничката работа на инволвираните организации во овој проект резултираше со креација на една иновативна алатка – Интерактивна книга со пристап чекор по чекор.

Дизајнот на Интерактивната книга е многу допадлив и лесен за користење. Содржината покрива голем опсег на реални, животни проблеми релевантни на наставната програма, возраста и интересот на учениците.

Пристапот на методот ги охрабрува послабите ученици да ја разберат суштината на математиката и да ги зголеми мотивацијата и учењето. Со овозможување помош на секој стадиум од решавањето, им се помага на учениците да ја користат книгата независно.

Овој вид проблеми се покажаа прилично предизвикувачки за учениците на многу меѓународни тестови. Методот Математички лавиринт за подучување математика може да биде решение на многу негативни резултати поврзани со ПИСА.

Подучувањето на учениците за решавање математички проблеми може да биде тешко дури и за наставниците. Сепак, помагањето на учениците да станат добри решавачи на проблеми е многу важна цел, предизвикувачка и возбудлива во исто време.

Во природата на учениците е да решаваат проблеми. Задачата на наставниците е да ја развијат природната способност на учениците за решавање проблеми до максимум, како и да ги додадат овие техники на веќе постоечките техники на проблемско решавање што учениците ги имаат на располагање.

Корисни линкови

TEDEd Lessons Worth Sharing
https://ed.ted.com/lessons?category=mathematics

GEOGEBRA Графички апликација за функции, геометрија, алгебра, калкулус, Статистика и 3Д математика
https://www.geogebra.org/

Teaching Channel
https://www.teachingchannel.org/videos/real-world-math-examples

Real World Math е колекција од слободни математички активности за Google Earth дизајнирана за ученици и едукатори
http://www.realworldmath.org/

Math and Logic Problems за развивање на логичко мислење и вештини за решавање проблеми
https://www.aplusclick.org/

Веб-страната е сеопфатен онлајн ресурс кој обезбедува алатки и идеи за професионален развој на математички едукатори низ сите фази и е динамично средство за комуникација помеѓу нив.
https://www.ncetm.org.uk/ncetm/about-the-portal

Страна со стотици слободни видеа во кои се прикажува уметност на решавање проблеми
http://artofproblemsolving.com/videos

Проект Учење математика преку нови комуникациски фактори
http://www.le-math.eu/index.php?id=14

The Virtual Math World
Виртуелна математичка лабораторија е проект кој овозможува учениците да визуелизираат комплексни математички концепти преку пристапен софтвер
http://cabinet.bg/index.php?status=applet&appletid=22&page=1

Врвни слободни ресурси за подучување и учење математика
http://classroom-aid.com/educational-resources/mathematics/

The Math Open Reference Project
Мисија: Слободен интерактивен учебник на мрежата. Првично покрива геометрија за средни училишта.
http://www.mathopenref.com/

Користена литература

Polya, G.(1973). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method, Second Edition, New Jersey: Princeton University Press.

New Zealand Ministry of Education (No date) *What is Problem Solving* [Online] Available: https://nzmaths.co.nz/what-problem-solving [Accessed 11 April 2017].

Polya's Problem Solving Techniques [Online] Available:http://scimath.unl.edu/conferences/documents/K-2ProblemSolvers.pdf [Accessed 14 April 2017].

Polya's Four Step Problem Solving Process [Online] Available:http://faculty.salisbury.edu/~dccathcart/mathreasoning/polya.html [Accessed 26 March 2017].

Meera (No date) Evaluation: What is it and why do it? [Online] Available: http://meera.snre.umich.edu/evaluation-what-it-and-why-do-it [Accessed 20 April 2017].

WWW.MATH-LABYRINTH.EU
INFO@MATH-LABYRINTH.EU

ISBN 978-608-66136-1-7

ВО ПОДДРШКАТА НА ОВАА ПУБЛИКАЦИЈА, ЕВРОПСКАТА КОМИСИЈА НЕ ГИ ПРОМОВИРА СОДРЖИНИТЕ КОИ ГИ РЕФЛЕКТИРААТ СТАВОВИТЕ САМО НА АВТОРИТЕ И КОМИСИЈАТА НЕ Е ОДГОВОРНА ЗА КАКВА БИЛО ПРИМЕНА НА ИНФОРМАЦИИ КОИ СЕ СОДРЖАНИ ВО НЕА.

NATIONAL AGENCY
for European Educational
Programmes and Mobility

Funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union